



OKTATÁSI  
HIVATAL

NAT  
2020

9

# Matematika

tankönyv

II. kötet



A kiadvány 2020. 06. 12-től 2025. 08. 31-ig tankönyvi engedélyt kapott a TKV/3174-7/2020. számú határozattal.

A tankönyv megfelel a Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról megnevezésű jogszabály alapján készült Kerettanterv a gimnáziumok 9–12. évfolyamára (Matematika) és a Kerettanterv a gimnáziumok 7–12. évfolyamára (Matematika) megnevezésű kerettanterv előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértő: Kónya István

Tananyagfejlesztő: Tamásné Kollár Magdolna, Kelemen-Kiss Ilona

Kerettantervi szakértő: dr. Csapodi Csaba

Lektorok: dr. Hoffmann Miklós, dr. Kosztolányi József, dr. Vancsó Ödön

Szerkesztő: Bosznai Gábor

Fedél: Slezák Ilona terve alapján Orosz Adél, Bánáti János

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók: Shutterstock; Pixabay; Flickr; Wikipedia; 123rf; Kovács Borbála, Létai Márton, Orosz Adél

A könyvben felhasználtuk a Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Bálint Zsuzsanna, Kelemenné Kiss Ilona, Gyertyán Attila, Hankó Lászlóné: Matematika 9. Második kötet tankönyv című művet. Raktári szám: FI-503010902/1

A nyersanyagként felhasznált tankönyv az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001. számú, „A Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

© Oktatási Hivatal, 2020

ISBN 978-615-6178-20-6

Oktatási Hivatal • 1055 Budapest, Szalay utca 10–14.  
Telefon: (+36-1) 374-2100 • E-mail: tankonyv@oh.gov.hu

A kiadásért felel: dr. Gloviczki Zoltán elnök

Raktári szám: OH-MAT09TA/II

Tankönyvkiadási osztályvezető: Horváth Zoltán Ákos

Műszaki szerkesztő: Orosz Adél

Nyomdai előkészítés: WOW (GL)

Terjedelem: 22,66 (A/5) ív, tömeg: 445,87 gramm

1. kiadás, 2020

Ez a tankönyv a Széchenyi 2020 Emberi Erőforrás Fejlesztési Operatív Program EFOP-3.2.2-VEKOP-15-2016-00001. számú, „A köznevelés tartalmi szabályozóinak megfelelő tankönyvek, taneszközök fejlesztése és digitális tartalomfejlesztés” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

**SZÉCHENYI** 2020



Nyomta és kötötte  
Felelős vezető:



MAGYARORSZÁG  
KORMÁNYA

**Európai Unió**  
Európai Szociális  
Alap



**BEFEKTETÉS A JÖVŐBE**



# A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

## 4. Bevezetés a geometriába

### – DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK ÉS PITAGORASZ TÉTELE

Kíváncsi vagy egy olyan síkidomra, melyről a fennmaradt első írásos emlékek kb. i. e. 2000-ből származnak?

### – ALAKZATOK TÁVOLSÁGA

„Messzi-e még a messzi?”... azaz hogyan értelmezzük a távolságot?

### – HÁROMSZÖGEK NEVEZETES PONTJAI ÉS VONALAI

Vonalakból pontok, pontokból körök, körökből... Nem árt ügyelni a háromszögek vonalaira sem.

### – DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG A KÖRBEN (THALÉSZ TÉTELE)

...már a görögök is tudták...

## 5. Függvények

### – HOGYAN KEZELJÜNK SOK-SOK ADATOT?

Mennyi szám!? Van értelme?... Tanuld meg, hogyan igazodj ki egy adatsokaságban!

### – ÁBRÁZOLJUNK FOLYAMATOKAT!

Szigorú és monoton? Olvass az ábrákról! Értelmezd a grafikonokat!

### – ALAPFÜGGVÉNYEK MEGISMERÉSE

Mitől függ? ...és hogyan?

### – SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA FÜGGVÉNNYEL

Szövegből grafikon...ábrázoljuk! Na látod, hogy látod!

## 6. Egybevágóság, négyszögek

### – SZIMMETRIÁK, TÜKRÖZÉSEK, ELTOLÁSOK

Tükör, biliárdasztal, forgó asztal ...

Tudod, hogy mi ezekben a közös? ...a témakör végén már tudni fogod!

### – NEVEZETES NÉGYSZÖGEK ÉS JELLEMZŐIK

Csúcsainak száma négy ... van két egyenlő nagyságú szöge ... átlói merőlegesek egymásra ... mi az?

### – TERÜLET ÉS KERÜLET SZÁMÍTÁSA

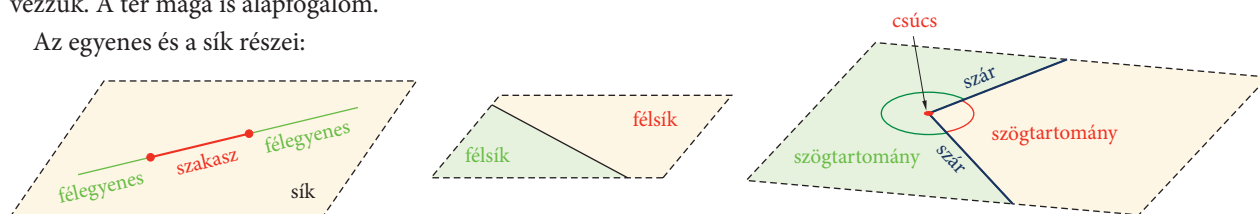
Szeretnél majd házat tervezni, kertet építeni? Ehhez el kell mélyülni a területszámítás témakörébe.



## ELMÉLET

A bennünket körülvevő tárgyakat **felületek** határolják. A szekrény oldala, az asztal teteje **síklap**, a virágcserep, a vizesüveg külseje **görbe felület**. A felületdarabok **vonalakban** csatlakoznak egymáshoz. Az asztalláb szomszédos lapjai **egyenes vonalban**, a bögre vagy egy palack alja és oldala **görbe vonalban** metszik egymást. A vonalak is, a lapok is **pontokból** állnak. A valóságos dolgok alapján megalkotott geometriai alapfogalmak: a **pont**, az **egyenes** és a **sík**. Ezeket **tételelemeknek** nevezzük. A tér maga is alapfogalom.

Az egyenes és a sík részei:

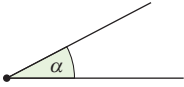
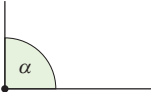
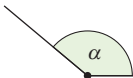
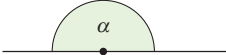
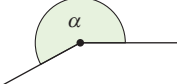
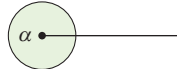


## A szögek mérése

A szög mértékének egyik egysége a teljes szög 360-ad része. Ezt  $1^\circ$ -os szögnek mondjuk.

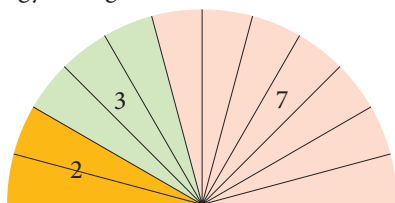
(Másik egységéről később fogunk tanulni.)

A táblázat mutatja, hány fokok az  $\alpha$  különféle szögek.

|               |                                                                                     | Ha                                   | akkor                              |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| konvex szögek |    | az $\alpha$ nullszög,                | $\alpha = 0^\circ$ .               |
|               |   | az $\alpha$ hegyesszög,              | $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .    |
|               |  | az $\alpha$ derékszög,               | $\alpha = 90^\circ$ .              |
|               |  | az $\alpha$ tompaszög,               | $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .  |
|               |  | az $\alpha$ egyenesszög,             | $\alpha = 180^\circ$ .             |
| konkáv szögek |  | az $\alpha$ homorú<br>(konkáv) szög, | $180^\circ < \alpha < 360^\circ$ . |
|               |  | az $\alpha$ teljeszög,               | $\alpha = 360^\circ$ .             |

## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy egyenesszöget három kisebb szögre osztunk fel. A keletkező szögek aránya  $2 : 3 : 7$ . Mekkora az egyes szögek?



$2 + 3 + 7 = 12$ . Az egyenesszög egytizenketted része  $180^\circ : 12 = 15^\circ$ .

A sárga rész:  $2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$ , a zöld rész:  $3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$ , a rózsaszín rész:  $7 \cdot 15^\circ = 105^\circ$ .

Ez a három szög valóban úgy aránylik egymáshoz, mint  $2 : 3 : 7$ , és az összegük  $180^\circ$ .

## ELMÉLET

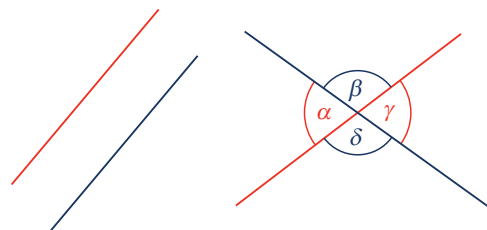
Egy síkban két egyenes VAGY **párhuzamos** (nincs közös pontjuk), VAGY **metszi egymást** (egy közös pontjuk van). (A pontos matematikai definíció szerint minden egyenes önmagával is párhuzamos.)

Ha két egyenes metszi egymást, de nem merőleges egymásra, akkor a keletkező *hegyesszöget* nevezzük az **egyeneselek szögének**. Ábránkon:

$\alpha$  és  $\gamma$  **csúcsszögek**,  $\beta$  és  $\delta$  **csúcsszögek**,

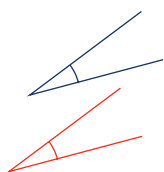
$\alpha$  és  $\beta$  **mellékszögek**,  $\gamma$  és  $\delta$  **mellékszögek**.

A csúcsszögek egyenlők, a mellékszögek összege egy egyenesszög.

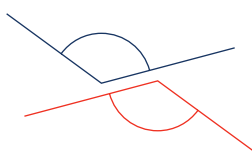


### Nevezetes szögpárok

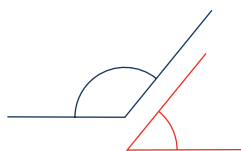
A **párhuzamos szárú szögek** – elhelyezkedésük szerint –, amint az ábrán látható, egyenlők, vagy  $180^\circ$ -ra egészítik ki egymást. Azokat a szögeket, melyek összege  $90^\circ$ , **pótszögeknek** hívjuk.



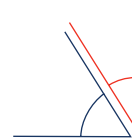
**egyállású szögek**  
(egyenlők)



**váltószögek**  
(egyenlők)



**kiegészítő szögek**  
( $180^\circ$ -ra egészítik ki egymást)



**pótszögek**  
(összegük  $90^\circ$ )

## KIDOLGOZOTT FELADAT

- 2.** Az  $\alpha$  szög  $16^\circ$ -kal nagyobb a mellékszögénél. Mekkora a csúcsszög?

*Első megoldás, egyenlettel*

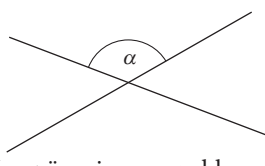
Az  $\alpha$  szög mellékszöge  $\alpha - 16^\circ$ , a két szög összege egy egyenesszög:

$$\alpha + \alpha - 16^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha - 16^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 196^\circ$$

$\alpha = 98^\circ$ , és természetesen a csúcsszög is ugyanekkora.



*Második megoldás, következtetéssel*

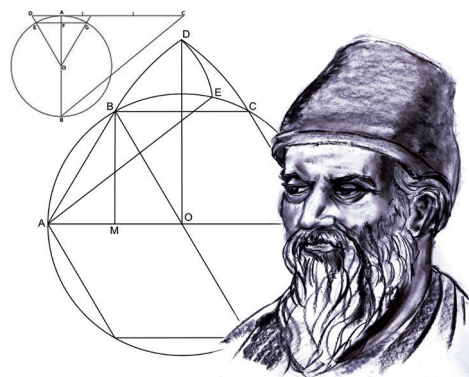
Ha két mellékszög különbsége  $16^\circ$ , akkor az egyik  $8^\circ$ -kal nagyobb a  $90^\circ$ -nál, a másik pedig  $8^\circ$ -kal kisebb nála. Tehát a nagyobbik szög  $98^\circ$ -os.

Természetesen ugyanekkora a csúcsszög is.

## ELMÉLET

Eukleidész görög matematikus, a „geometria atyja” (i. e. 3. század) szerkesztési feladatokkal is foglalkozott. Ehhez egyélű vonalzót és körzőt használt. Ezek használatát a következőképpen rögzítette.

1. Két ponton át egyenest fektethetünk.
2. Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.
4. Két egyenes metszéspontját meghatározhatjuk.
5. Egyenes és kör metszéspontjait meghatározhatjuk.
6. Két kör metszéspontjait meghatározhatjuk.

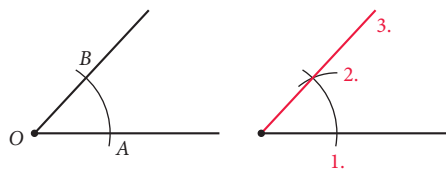




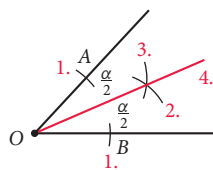
A véges sok ilyen lépésből álló szerkesztést **euklideszi szerkesztésnek** nevezzük, s ezek segítségével elvégezhető a következő alapszerkesztések mindegyike:

(az ábrákon a sorszáмок a szerkesztési lépéseket jelölik)

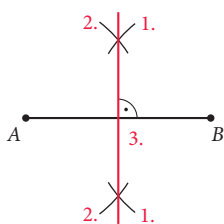
### 1. szögmásolás



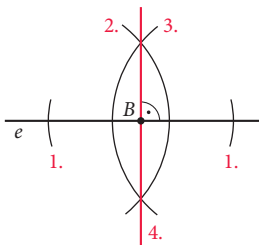
### 2. szögfelező szerkesztése



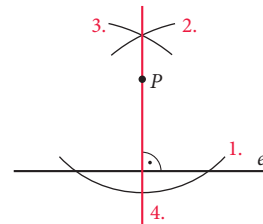
### 3. szakaszfelező merőleges egyenes szerkesztése



### 4. merőleges szerkesztése adott egyenesre (e) az egyenes adott pontján át (B)



### 5. merőleges szerkesztése adott egyenesre (e) az egyenesre nem illeszkedő ponton keresztül (P)



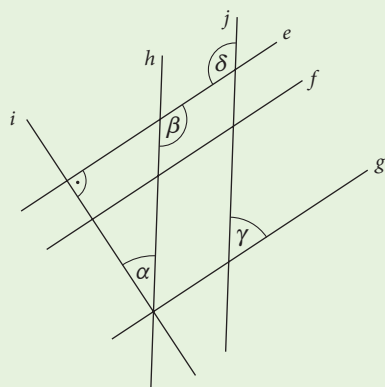
## FELADAT

1. Az alábbi nyomtatott nagybetűk melyikében találsz
- a) csúcsszögeket      d) homorúsíszöget
  - b) tompaszöget      e) kiegészítő szögeket
  - c) váltószögeket      f) pótszögeket?

**A E H K L M N T X Z**

2. Az ábrán látható egyenesekről tudjuk, hogy  $e \parallel f$ ;  $f \parallel g$ ;  $h \parallel j$ ;  $i \perp e$ .

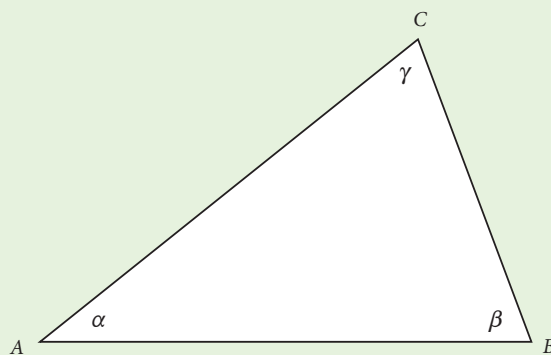
(a  $\parallel$  szimbólum az egyenesek párhuzamosságát, a  $\perp$  szimbólum az egyenesek merőlegességét jelzi)



- a) Mely egyenesek között áll még fenn párhuzamosság, illetve merőlegesség?
- b) Határozd meg az ábrán görög betűkkel jelölt szögek nagyságát, ha tudjuk, hogy  $\alpha = 40^\circ$ !

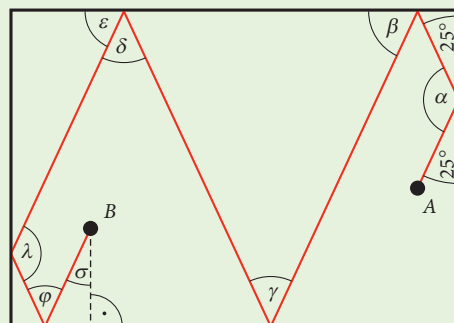
3. Rajzolj egy olyan háromszöget a füzetedbe, melynek méretei közel azonosak az ábrán lévővel!

- a) Körző használatával dönts el, hogy melyik a rajzolt háromszöged legnagyobb, illetve legkisebb szöge! Ne használj szögmérőt!
- b) Szerkeszd meg az  $\alpha$  szög szögfelezőjének és az AB oldal felezőmerőlegesének metszéspontját!



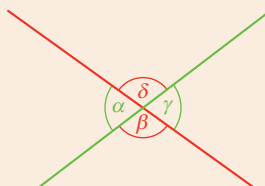
4. Hány fokot fordult el a toronyóra nagymutatója, illetve kismutatója 4 óra 00 perctől 4 óra 40 percre?
5. Tudjuk, hogy egy szög pótszögének és kiegészítő szögének összege  $210^\circ$ -kal nagyobb a szög váltószögének nagyságánál. Hány fokos az eredeti szög?
6. A téglalap alakú biliárdasztalon meglökött A golyó hatszori visszaverődés után találta el a B biliárdgolyót.
- a) Számítsd ki a megjelölt szögeket (minden visszaverődés tökéletesen rugalmasnak vehető)!

- b) A megadottak közül válassz ki további párhuzamos szárú szögeket: egyállású szögeket, váltószögeket és kiegészítő szögeket!

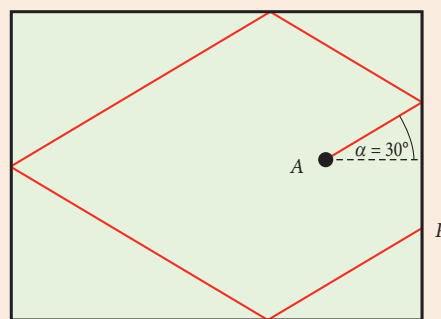


## HÁZI FELADAT

1. Hány fokos szöget alkotnak az óramutatók (a kis- és nagymutató)
- a) 5 órakor;  
b) 3 óra 20 perckor;  
c) 12 óra 30 perckor?
2. Mekkora az a szög, amely
- a) a mellékszögének a hetedrésze;  
b) a kiegészítő szögével egyenlő;  
c) a váltószögével együtt  $128^\circ$ -ot tesz ki?
3. Rajzold meg a füzetedbe az  $\alpha$ , a  $\beta$ , a  $\gamma$  és a  $\delta$  szögfelezőjét!
- a) Hány egyenest kaptál?  
b) Mekkora ezeknek az egyeneseknek a szöge?



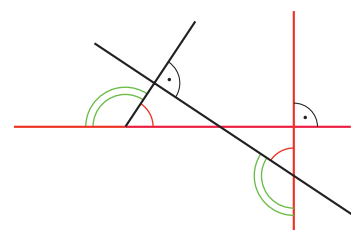
4. Egy egyenesszöget négy részre bontunk úgy, hogy a szomszédos szögek különbsége  $10^\circ$ , és az egymást követő szögek egyre nagyobbak. Mekkora ezek a szögek?
5. Az ábrán egy biliárdasztalt látunk. Keress párhuzamos szárú szögeket! Vannak-e közöttük
- a) egyállású derékszögek (az asztal határoló egyeneseket is figyelve);  
b)  $30^\circ$ -os váltószögek;  
c) egyenlő kiegészítő szögek;  
d) nem egyenlő kiegészítő szögek;  
e) tompaszögű váltószögek?



## RÁADÁS

### Merőleges szárú szögek

A merőleges szárú hegyesszögek egyenlők, s a merőleges szárú tompaszögek is egyenlők. Ha az egyik hegyesszög, a másik tompaszög, akkor  $180^\circ$ -ra egészítik ki egymást.





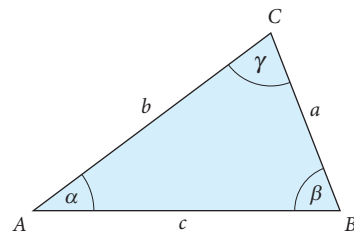
## BEVEZETŐ

Az  $ABC$  háromszögek szokásos jelölései:

- az  $A$  csúcsnál lévő belső szög  $\alpha$ , és a szemközti  $BC$  oldalt jelöljük  $a$ -val;
- a  $B$  csúcsnál lévő belső szög  $\beta$ , és a szemközti  $AC$  oldalt jelöljük  $b$ -vel;
- a  $C$  csúcsnál lévő belső szög  $\gamma$ , és a szemközti  $AB$  oldalt jelöljük  $c$ -vel.

A geometriában a pontok jelölésére általában a latin ábécé nagybetűit, az egyenesek és a szakaszok jelölésére a latin ábécé kisbetűit, a szögek jelölésére a görög ábécé kisbetűit használjuk.

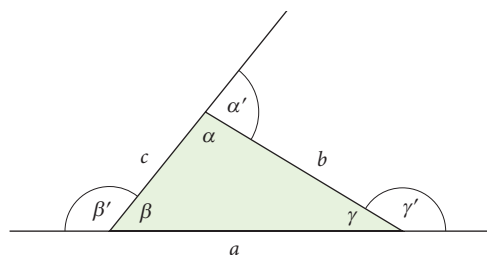
Shokásos, hogy a szakasz (illetve oldal) betűjele a szakasz (illetve oldal) hosszát jelöli. Például a rajzunkon lévő  $A$  és  $B$  pontok által létrehozott szakasz betűjele  $c$ , mely egy számítási feladatban jelentheti a szakasz hosszának nagyságát is. A betű jelentését minden esetben a szöveggörnyezet alapján tudjuk egyértelműen eldönteni.



## ELMÉLET

Minden háromszögre igaz, hogy:

|                                                                              |                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a belső szögek összege $180^\circ$ ;                                         | $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$                                                             |
| minden belső szög és a mellette fekvő külső szög összege $180^\circ$ ;       | $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ ; $\beta + \beta' = 180^\circ$ ;<br>$\gamma + \gamma' = 180^\circ$ |
| mindegyik külső szög egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével; | $\alpha' = \beta + \gamma$ ; $\beta' = \alpha + \gamma$ ;<br>$\gamma' = \alpha + \beta$           |
| a külső szögek összege $360^\circ$ .                                         | $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$                                                          |



Minden háromszögre igaz, hogy:

|                                                                             |                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| bármely két oldal hosszúságának az összege nagyobb, mint a harmadik oldal;  | $a + b > c$ ; $a + c > b$ ; $b + c > a$       |
| bármely két oldal hosszúságának a különbsége kisebb, mint a harmadik oldal; | $ a - b  < c$ ; $ a - c  < b$ ; $ b - c  < a$ |

## FELADAT

1. Az  $ABC$  háromszög  $\alpha$  szöge  $45^\circ$ -os,  $\beta$  szöge  $75^\circ$ -os.

Készíts ábrát a füzetedben, jelöld be rajta a háromszög külső és belső szögeit, és töltsd ki a táblázatot!

| a háromszög belső szögeinek összege | $\gamma$ szög nagysága | $\alpha$ külső szögének nagysága | $\beta$ külső szögének nagysága | $\gamma$ külső szögének nagysága | a háromszög külső szögeinek összege |
|-------------------------------------|------------------------|----------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
|                                     |                        |                                  |                                 |                                  |                                     |

2. Az alábbi állításokról dönts el, hogy melyik igaz, melyik hamis!

|                                                                                                                       | Igaz | Hamis |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|
| 1 cm, 2 cm és 3 cm hosszú szakaszokból (mint oldalakból) nem lehet háromszöget alkotni.                               |      |       |
| 2 cm, 3 cm és 4 cm hosszú szakaszokból (mint oldalakból) nem lehet háromszöget alkotni.                               |      |       |
| Van olyan háromszög, melynek egyik belső szöge $80^\circ$ -os, ugyanakkor van $110^\circ$ -os külső szöge.            |      |       |
| A külső szögek összege minden háromszög esetén ugyanannyi.                                                            |      |       |
| Minden háromszög külső szögeinek összege $180^\circ$ .                                                                |      |       |
| Van olyan háromszög, amelynek egyik külső szöge kétszer akkora, mint a másik két csúcshoz tartozó belső szög összege. |      |       |
| Ha egy háromszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala, akkor van két egyenlő szöge is.                                |      |       |
| Ha egy háromszögnek van két egyenlő szöge, akkor van két egyenlő hosszúságú oldala is.                                |      |       |

## ELMÉLET

### Egyenlő szárú háromszögek

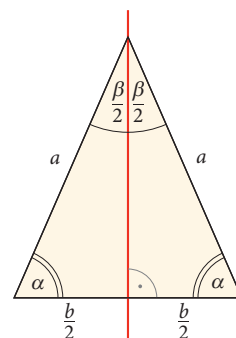
Ha egy háromszögnek van két egyenlő hosszúságú oldala, akkor ezeket a háromszög **szárainak** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a háromszög **egyenlő szárú**. A harmadik oldal a háromszög **alapja**.

Minden egyenlő szárú háromszögre igaz, hogy:

van két egyenlő nagyságú szöge (alapon fekvő szögek);

tengelyesen szimmetrikus;

szimmetriatengelye a háromszög egyik oldalának (alapjának) felezőmerőlegese, egyben a szárak által meghatározott szög (**szárszög**) szögfelezője is.



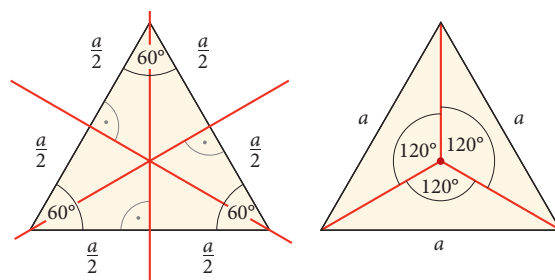
Ha egy háromszögnek mindhárom oldala egyenlő, akkor **szabályos háromszögnek** nevezzük.

Minden szabályos háromszögre igaz, hogy:

minden szöge egyenlő nagyságú,  $60^\circ$ -os;

tengelyesen szimmetrikus;

3 szimmetriatengelye van.



## KIDOLGOZOTT FELADAT

A gyümölcszedéshez két létrát kaptunk kölcsön, ezek azonban nem egyforma hosszúak. Oda lehet-e támasztani a létrákat a fához két oldalról úgy, hogy ugyanolyan magasra érjenek?

*Megoldás*

A feladat természetesen könnyedén megoldható, mindössze annyi szükséges, hogy a hosszabb létrát ( $a > b$ ) kisebb szögben támasszuk a fához, mint a rövidebb létrát ( $\alpha > \beta$ ).



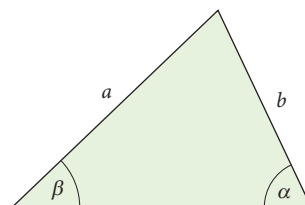
## ELMÉLET

Ha a háromszögben két oldal nem egyenlő, akkor a nagyobb oldallal szemközti szög nagyobb, mint amelyik a kisebb oldallal van szemben.

És megfordítva:

Ha a háromszögben két szög nem egyenlő, akkor a nagyobb szöggel szemközti oldal nagyobb, mint amelyik a kisebb szöggel van szemben.

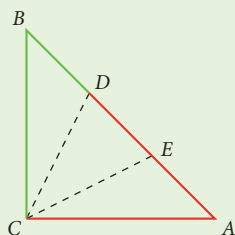
Tehát ha  $a > b$ , akkor  $\alpha > \beta$ , és ha  $\alpha > \beta$ , akkor  $a > b$ . Összefoglalva:  $a > b$ , akkor és csak akkor, ha  $\alpha > \beta$ .



## FELADAT

1. Az  $ABC$  egyenlő szárú derékszögű háromszögben  $CB = CA$ , és fennáll, hogy  $AD = AC$  és  $BE = BC$ .

- a) Mekkora a rajzon látható hegyesszögek?  
b) Igazold, hogy a  $CDE$  háromszög egyenlő szárú!



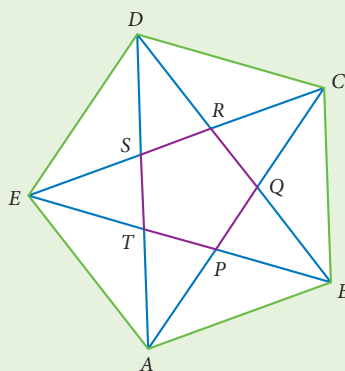
2. (Érettségi feladat)

Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsánál lévő külső szöge  $104^\circ$ -os,  $B$  csúcsánál lévő belső szöge  $74^\circ$ -os. Hány fokos a háromszög  $C$  csúcsánál lévő külső szöge? Válaszát indokolja!

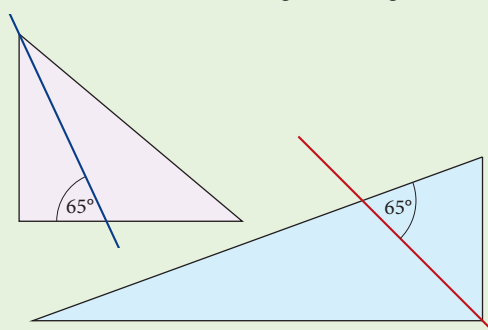
3. A következő ábrán egy ötszög csúcsait kötöttük össze szakaszokkal. Az azonos színű szakaszok hossza egyenlő.

- a) Adj meg csúcsaival legalább három olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek szárai zöldek!  
b) Adj meg csúcsaival legalább három olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek alapja zöld!  
c) Igazold, hogy az  $ABD$  háromszögnek van két egyenlő nagyságú szöge!

- d) Határozd meg az a), b) és c) esetben említett háromszögek szögeinek nagyságát, ha tudjuk, hogy a  $PQRST$  ötszög minden belső szögének nagysága  $108^\circ$ !



4. Egy derékszögű háromszög egyik szögfelezője  $65^\circ$ -os szöget alkot a szemközti oldallal. Mekkora lehetnek ennek a háromszögnek a szögei?



## HÁZI FELADAT

1. (Érettségi feladat)

Egy háromszög belső szögeinek aránya  $2:5:11$ . Hány fokos a legkisebb szög?

2. A 3. feladatban lévő „színes” ábrán keress olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek nincs zöld színű oldala! Add meg csúcsaival az összes ilyen háromszöget!



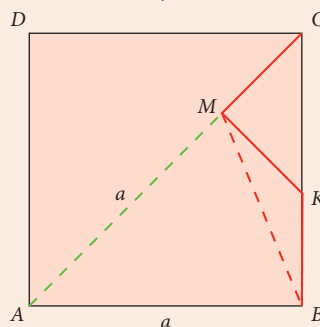
**3** Egy egyenlő szárú háromszög egyik alapszöge  $43^\circ$ -kal kisebb, mint az egyik külső szöge. Mekkora lehetnek ennek a háromszögnek a szögei?

**4** Szerkessz olyan egyenlő szárú háromszöget, amelynek az alapja 4 cm hosszú, és

- a) az alapjához tartozó magassága 3 cm hosszú;
- b) szárai 2 cm-rel hosszabbak, mint az alapja
- c) az egyik szöge  $90^\circ$ -os;
- d) az egyik szöge  $60^\circ$ -os!

**5** Az ABCD négyzetben  $AM = AB$ , és az MK szakasz merőleges az AC átlóra.

a) Mekkora a rajzon látható hegyesszögek?



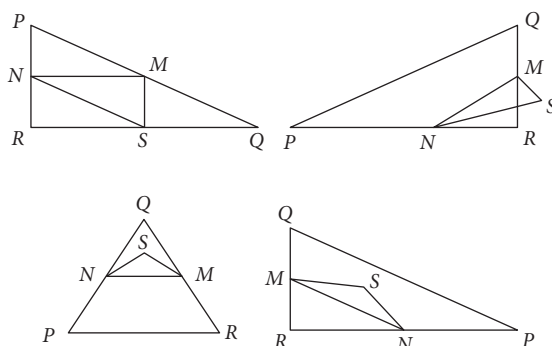
b) Igazold, hogy a BK, a KM és az MC szakasz egyenlő hosszú!

## RÁADÁS

(Kompetenciafeladat, 2007)

Melyik háromszögre igaz az alábbi leírás?

„A PQR derékszögű háromszög, amelyben az R csúcsnál található a derékszög. Az RQ oldal hossza kisebb a PR oldal hosszánál. Az RQ oldal felezőpontja az M pont, az N pont pedig a PR oldal felezőpontja. Az S pont a háromszög belső pontja. Az MN oldal hossza nagyobb, mint az MS oldalé.”

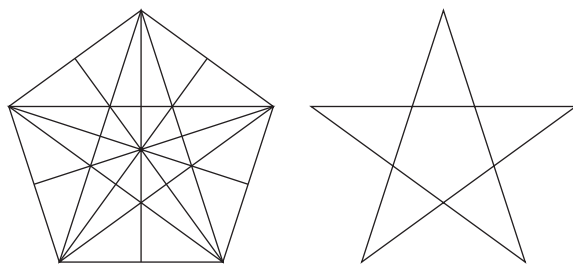


## RÁADÁS

„Püthagorasznak és iskolájának mennyiségnyi ismereténél még sokkal érdekesebb geometriai tudománya. Bámulatra méltó az a gondosság és megfigyelési tehetség, melyek segítségével annyi ismeretre tettek szert. Ismerték azt a tételt, hogy a háromszög szögeinek összege  $180^\circ$ , és ezt be is bizonyították, mégpedig úgy, hogy a háromszög egyik csúcspontján át a szemközt fekvő oldallal párhuzamos vonalat húztak, és a keletkezett váltószögek egyenlőségére utaltak. Manapság is még rendszeresen ezt a bizonyítást használjuk.

Püthagorasz behatóan tanulmányozta a szabályos idomokat és kiválóan azokat, melyeket vagy egyenlő szárú derékszögű vagy min-taháromszögekre lehet bontani. Ennek alapján az összes idomok alapelemének a derékszögű háromszöget tekintette. Azt találta továbbá, hogy a síkot csak szabályos három-, négy- vagy hatszögek tölthetik ki teljesen. A szabályos ötszöggel is foglalkozott, és azt különböző vonalakkal 30 derékszögű háromszögre bontotta.

A vonalak és idomok e sokaságából különösen a csillagötszög bontakozott ki, az ún. pentagramm, melyet a pythagoreusok ismertető jelül használtak és a tökéletesség és titoktartás szimbólumának tekintettek. E jelet utóbb a középkorban is gonosz szellemek ellen alkalmazták.”



(Forrás: Középiskolai Matematikai Lapok, 1897. április)

### Fejtörő:

Hat (azonos hosszúságú) gyufaszázból rakj ki négy szabályos háromszöget, melyeknek minden oldala egy gyufaszál hosszúságú! Engedd szabadjára fantáziád minden irányban!

## BEVEZETŐ

1. Be lehet-e tolni összehajtás nélkül egy 15-ször 20 cm-es, téglalap alakú levélre-készbe egy 25 cm széles borítékot?



## Megoldás

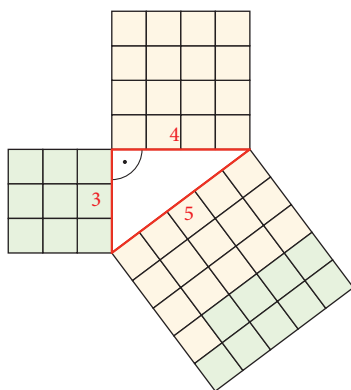
Nyilván a legnagyobb hely átlósan van, ezért így próbáljuk berakni a borítékot. A tapasztalat azt mutatja, hogy ez éppen sikerül. A 25 cm-es boríték még pontosan belefér a rekeszbe, de ha egy kicsit is szélesebb lenne, már meg kellene hajlítani.

2. Milyen összefüggés áll fenn az előző feladatbeli három szám között?

## Megoldás

$$15^2 + 20^2 = 25^2.$$

Ilyen összefüggés áll fenn a 3 cm, 4 cm és 5 cm oldalú háromszögek oldalai között is.



Ez a háromszög derékszögű:

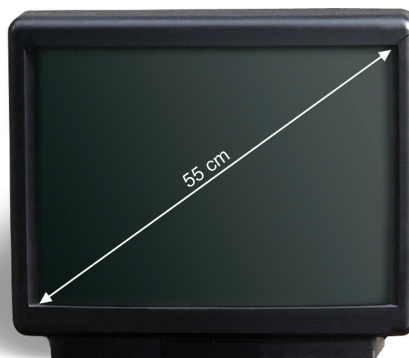
$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Az 5-12-13 számhármásra is hasonló összefüggés igaz.

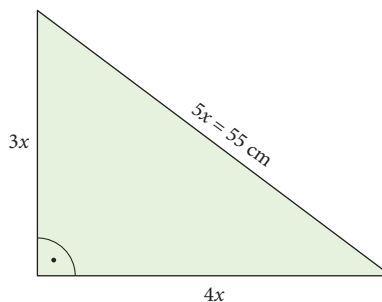
$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2.$$

Ez az összefüggés minden derékszögű háromszög oldalai között fennáll: a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

3. A tévékészülékek képernyőméretét a képátló hosszával szokták megadni. Figyelembe véve, hogy a régebben használatos készülékek képernyőjének szélesség-magasság aránya 4 : 3, mekkora az a képernyő, amelyet 55 cm-esként hirdetnek?



## Megoldás



Itt azt tudjuk, hogy  $sz = 4x$ ,  $m = 3x$ , tehát ha ez így van, akkor a képátló  $5x = 55$ .

Ezt a területek alapján felállított képlettel is ellenőrizhetjük:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 55^2$$

$$9x^2 + 16x^2 = 3025$$

$$25x^2 = 3025$$

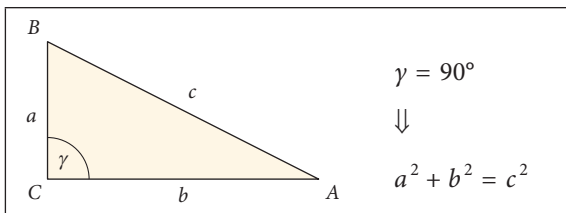
$$x^2 = 121$$

$$x = 11$$

$x = 11$ , tehát a magasság  $3x = 3 \cdot 11 = 33$  (cm), a szélesség

$4x = 4 \cdot 11 = 44$  (cm).

**Pitagorasz tétele** Ez a sok ezer éves matematikának a leghíresebb tétele.



A derékszögű háromszög két befogójának négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

(másképp: Ha egy háromszög derékszögű, akkor két befogójának négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.)

*Bizonyítás:*

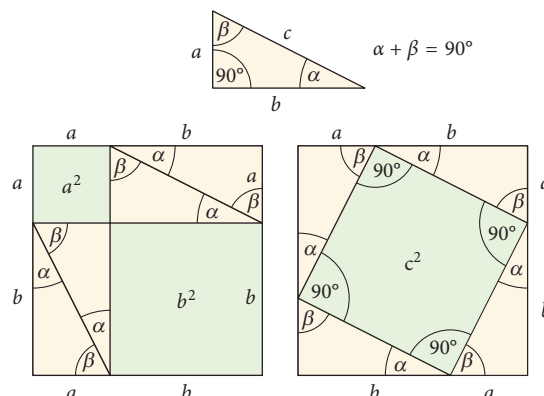
Jelölje a derékszögű háromszög befogóinak hosszát  $a$  és  $b$ , átfogójának hosszát  $c$ .

Állítás:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Tekintsünk két  $a + b$  oldalú négyzetet az ábra szerint!

A két négyzet területe egyenlő.

A bal oldali négyzetet felbontottuk egy  $a^2$  és egy  $b^2$  területű négyzetre (a felosztásból eredő párhuzamosság miatt), továbbá négy olyan derékszögű háromszögre, amelynek befogói  $a$ , illetve  $b$ . Ezen négy háromszög egybevágó (fedésbe hozható) egymással és az eredeti háromszöggel, tehát területük egyenlő.



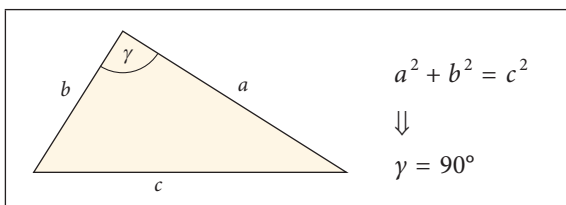
A jobb oldali négyzetben létrehozott derékszögű háromszögek egybevágók (fedésbe hozhatók) egymással és az eredeti háromszöggel is, ezért átfogóik hossza – a közepén elhelyezkedő négyszög oldalainak hossza – egyenlő. Ugyanakkor a közepén elhelyezkedő négyszög szögei  $90^\circ$ -osak, mivel az egybevágó derékszögű háromszögekben  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Előbbiekből adódik, hogy a közepén lévő négyszög négyzet.

Ha a derékszögű háromszögek átfogója  $c$ , akkor a közepén lévő négyzet területe  $c^2$ .

Mindkét  $a + b$  oldalú négyzet területéből kivonva a 4-4 egybevágó háromszög területét, a fennmaradó területek egyenlők lesznek, így  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Ezzel igazoltuk az állítást.

**A Pitagorasz-tétel megfordítása:**



Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor ez a háromszög derékszögű.

A derékszög a leghosszabb oldallal van szemben.

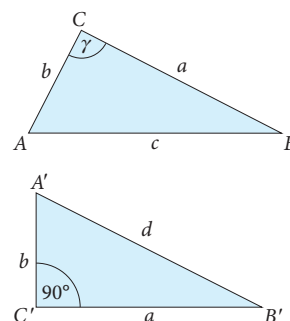
*Bizonyítás:*

Legyen az  $ABC$  háromszög három oldala  $a$ ,  $b$  és  $c$ .

Tudjuk, hogy a háromszög oldalaira igaz:  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Állítás: a  $c$  oldallal szemben lévő  $\gamma$  szög nagysága  $90^\circ$ .

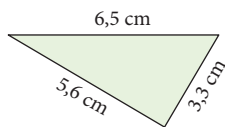
Az  $a$ ,  $b$  szakaszokkal mint befogókkal rajzoljunk egy  $A'B'C'$  derékszögű háromszöget, melyre Pitagorasz tétele miatt  $a^2 + b^2 = d^2$ . Az oldalakra felírt egyenlőségek miatt  $c^2 = d^2$ , ezért  $c = d$ , ahol  $c$  és  $d$  pozitív számok. A háromszöget három oldalának hossza egyértelműen meghatározza, ezért a megfelelő szögek páronként egyenlők. Ezzel beláttuk, hogy az  $ABC$  háromszögben a  $C$  csúcsnál derékszög van, nagysága  $90^\circ$ .



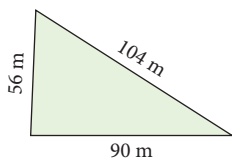
## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Derékszögűek-e az alábbi háromszögek?

a)



b)



Megoldás

a)  $5,6^2 + 3,3^2 = 6,5^2$

$$31,36 + 10,89 = 42,25$$

$$42,25 = 42,25$$

Ez igaz állítás, tehát (a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint) a háromszög **derékszögű**.

b)  $56^2 + 90^2 = 104^2$

$$3136 + 8100 = 10\,816$$

$$11\,236 = 10\,816$$

Ez hamis állítás, tehát (a Pitagorasz-tétel szerint) a háromszög **nem derékszögű**.

2. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5,5 cm hosszú. Az átfogója 2,5 cm-rel hosszabb, mint az ismeretlen befogó. Milyen hosszú az átfogó?

Megoldás:

Jelöljük az ismeretlen befogó hosszát  $x$ -szel. Ekkor az átfogó hossza  $x + 2,5$ .

Írjuk fel a háromszög oldalaira Pitagorasz tételét!

$$5,5^2 + x^2 = (x + 2,5)^2$$

A zárójel felbontásakor alkalmazzuk a nevezetes azonosságot!

$$(x + 2,5)^2 = x^2 + 2 \cdot 2,5 \cdot x + 2,5^2 = x^2 + 5x + 6,25$$

Ezért:

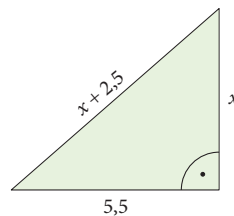
$$5,5^2 + x^2 = x^2 + 5x + 6,25 \quad / - x^2$$

$$30,25 = 5x + 6,25 \quad / - 6,25$$

$$24 = 5x$$

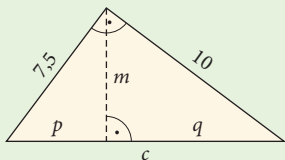
$$x = 4,8 \text{ (cm)}$$

Az átfogó hossza  $4,8 + 2,5 = 7,3$  (cm).



## FELADAT

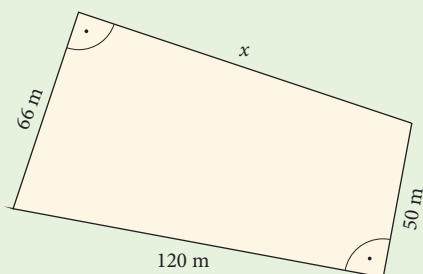
1.



- Mekkora a derékszögű háromszög területe?
- Mekkora a háromszög átfogója ( $c$ )?
- Mekkora a háromszög átfogóhoz tartozó magassága ( $m$ )?
- Mekkora szakaszokra bontja az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót (mekkora  $p$  és  $q$ )?
- Igaz-e, hogy  $m = \sqrt{p \cdot q}$ ?

2.

Számítsd ki a telek ismeretlen oldalhosszát és a telek területét!



3.

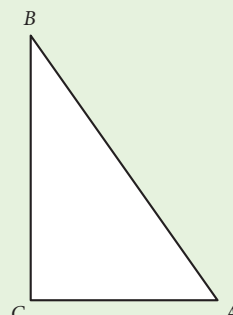
Egy háromszög oldalainak hossza

- a) 12, 15 és 11;      b) 40, 41 és 9.

Derékszögű-e a háromszög?

4.

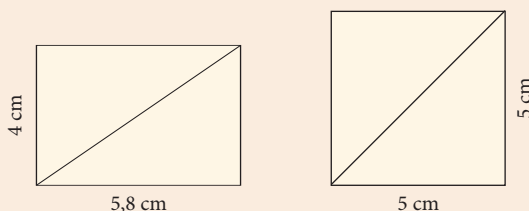
Hajózási szakbolt reklámjához vitorlát jelképező, „álló” derékszögű háromszöget szeretnének készíteni neonkábeltől, a neonkábel meghajlításával. A cső (ABCA töröttvonal) hossza 126 cm, és a tervezett vitorla szélessége (CA a derékszögű háromszög rövidebb befogója) 28 cm. Az egyik végétől számítva hány cm távolságban hajlítsák meg a neoncsövet ahhoz, hogy elkészüljön a kívánt háromszög? Mekkora az így kapott „vitorla” oldalai?





## HÁZI FELADAT

1. Az alábbiak közül melyik téglalap átlója hosszabb?



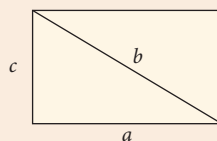
2. Egy hajó nyugat felé indult, és irányváltoztatás nélkül 3 km-t haladt. Ezután délnek fordult, és irányváltoztatás nélkül újabb 5 km-t tett meg. Mekkora távolságra került a kiindulási helyétől?

3. Gazda Géza fakerítéssel szeretné körbevenni téglalap alakú hétvégi telkét. A barkácsboltban veszi észre, hogy otthon hagyta a kert adatairól készített jegyzetét. Arra emlékszik, hogy a kert egyik oldala 33 méter hosszú, és hogy a kert átlósan 9 méterrel hosszabb, mint a kert másik oldala. Rövid fejtörés

után magabiztosan lép az eladóhoz. Hány méter kerítésanyagot kell kérnie, ha a gyártás és a szerelés során fellépő veszteség miatt a szükségesnél 10%-kal több anyagot vesz?

4. Egy téglalapot és egy egyenlő szárú háromszöget rajzoltunk. Melyik kijelentés igaz, melyik hamis?

a)



$$a^2 + b^2 = c^2$$

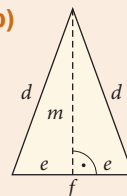
$$a^2 + c^2 = b^2$$

$$a + c = b$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2 - c^2 = a^2$$

b)



$$d^2 + d^2 = f^2$$

$$m^2 - e^2 = d^2$$

$$e^2 + m^2 = d^2$$

$$e + e = f$$

$$m^2 + \frac{f^2}{4} = d^2$$

## RÁDÁS

### A „szektavezér”

Valamikor időszámításunk előtt 520 környékén Görögország partjainak közelében egy megkötözött férfi küzdött az életéért, midőn végül behajították a háborgó tenger hullámai közé. A bűne, mellyel az istenek előtt kellett felelnie, az volt, hogy kimondott egy szörnyű titkot. Az irracionális titkát.

A fenti szövegrész nem Pitagoraszról szól, de ha tovább olvasol, többet is megtudhatsz a szörnyű gyilkosságról. Pitagorasz nagy tekintélyű görög filozófus volt, i. e. VI. században élt. Tanítványai, a pitagoreusok a számoknak mágikus erőt tulajdonítottak, azt képzelték, hogy a számokból – ez alatt a természetes számokat értették – ered az élet harmóniája. A számok segítségével próbálták megismerni magát a világot, például a zenei harmóniát.

Ugyan a Pitagorasz-tétel kétségtől az egyik legnagyobb jelentőségű tantételük volt, arra nincs bizonyítékunk, hogy Pitagorasz maga is ismerte volna ennek a tételnek a bizonyítását. Az bizonyos, hogy a tételt az indiaiak és babiloniak már korábban is ismerték és használták, és az is valószínű, hogy bizonyítást is ismertek hozzá. Az, hogy mégis Pitagorasz nevéhez kapcsoljuk, annak az eredménye, hogy ő és tanítványai játszották a legnagyobb szerepet a tétel elterjesztésében.

A pitagoreus közösségről ugyanakkor fennmaradt néhány – szintén kétes hitelességű – legenda. A leghíresebb ezek közül Hippiaszos esetét, akit a történet szerint azért vetettek a tengerbe, mert felfedte az „irracionális titkát”, miszerint egy négyzet átlójának hossza nem írható fel az oldalak egész számú többszöröseinek arányával. Ez a felismerés lényegében azt mondja ki, hogy a  $\sqrt{2}$  irracionális szám.



## BEVEZETŐ

1. Írószerboltokban kapható olyan derékszögű háromszögvonalzó, amelynek a két befogója egyenlő hosszú. A skálát rendszerint az egyik befogóra teszik, de az átfogója mentén ennél hosszabb vonalat is húzhatunk vele. Milyen hosszút?

Megoldás

Legyen a vonalzó befogója pl. 1 dm, az átfogója  $x$  dm.

Ebből Pitagorasz tétele alapján:

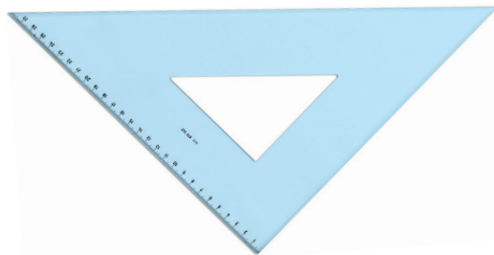
$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 1 + 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Az átfogó hossza közelítőleg 1,41 dm hosszú, így ilyen hosszúságú szakasz húzható az átfogó mentén.



Próbáljuk meg egy átlagos, 20 cm-es befogójú vonalzóval is:

$$x^2 = 20^2 + 20^2 = 20^2 \cdot 2$$

$$x = \sqrt{20^2 \cdot 2}$$

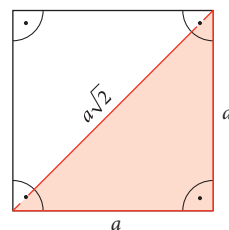
$$x = \sqrt{20^2} \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2} \approx 28,3 \text{ (cm)}.$$

Tapasztalatunk szerint tehát az átfogó  $\sqrt{2}$ -ször olyan hosszú, mint a befogók. Ez a kapcsolat általánosan igazolható. Végezd el a levezetést!

## ELMÉLET

Az  $a$  befogójú **egyenlő szárú derékszögű háromszög** átfogójának hossza a befogó hosszának  $\sqrt{2}$ -szerese, vagyis  $a\sqrt{2}$ .

Az  $a$  oldalú négyzet átlójának hossza a négyzet oldalának  $\sqrt{2}$ -szerese, vagyis  $a\sqrt{2}$ .

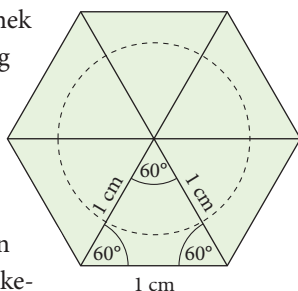


2. Mekkora nyílású villáskulcs szükséges egy olyan anyacsavar meghúzásához, amelynek az oldal-lapja 1 cm széles?



Megoldás

Az anyacsavar felülnézetének körvonala szabályos hatszög alakú. Ez a hatszög a középpontjából kiindulva szabályos háromszögekre bontható. Az ilyen háromszögek oldala éppen a hatszög 1 cm-es oldala, a ke-



resett kulcsnyílás pedig a szabályos háromszögek magasságának kétszerese.

A szabályos háromszöget a magassága két derékszögű háromszögre bontja, alkalmazzuk ezekre Pitagorasz tételét:

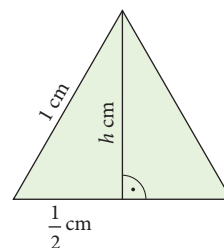
$$h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A keresett kulcsnyílás ennek duplája, azaz

$$x = 2h = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ cm}.$$



Sok probléma megoldása közben bukkan fel a szabályos háromszög fele. Ennek az egyik szöge derékszög, a másik  $30^\circ$ -os, a harmadik  $60^\circ$ -os.

Általános érvényű összefüggés írható fel a szabályos háromszög oldalának és magasságának hossza között.

Végezd el a levezetést!

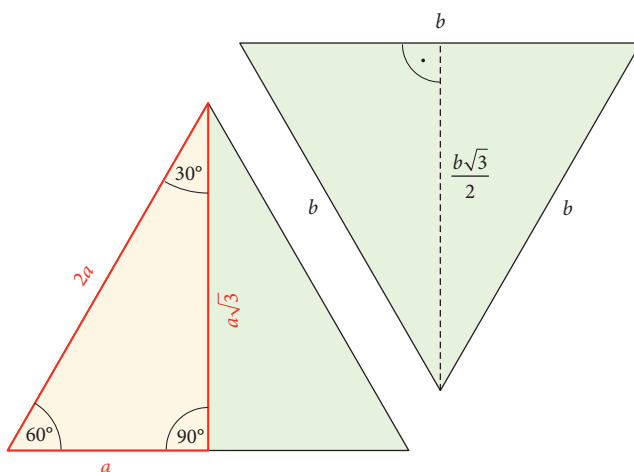
## ELMÉLET

A szabályos háromszög magasságának hossza megegyezik

a háromszög oldalhosszáinak  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -szeresével.

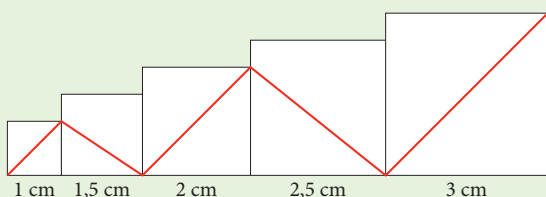
Ha a szabályos háromszög oldalának hossza  $b$ , akkor

a magasság  $b \frac{\sqrt{3}}{2}$  hosszú.

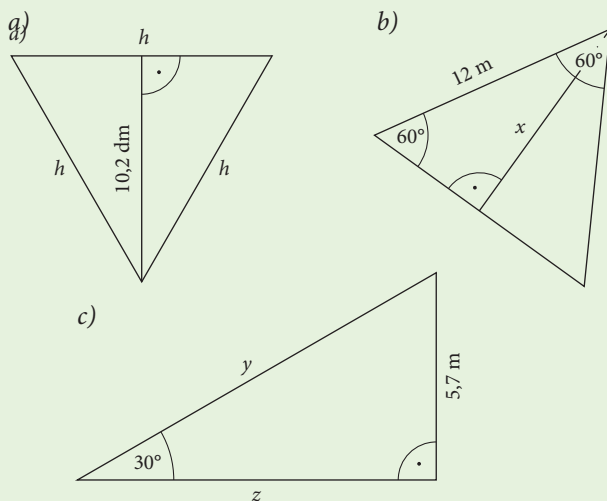


## FELADAT

1. Számítsd ki a töröttvonal hosszát, ha az ábrán lévő minden négyzög négyzet!



2. Számítsd ki az ismeretlen hosszúságokat!



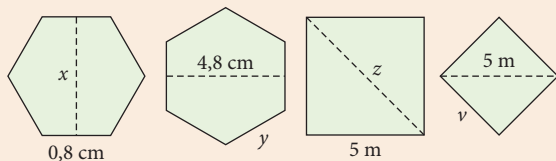
3. Szerkessz a füzetedbe a lap közepére egy 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget! Szerkessz a háromszög minden oldalára kifelé egy újabb 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget!

- Milyen síkidomot hoz létre az előbb megszerkesztett négy háromszög?
- Számolással határozd meg a kapott síkidom magasságának hosszát egy tizedesjegyre kerekítve!
- Szerkeszd meg a kapott síkidom magasságát!
- Mérd le a magasság hosszát, és hasonlítsd össze a mérés és a b) feladatrészen elvégzett számolásod eredményét!

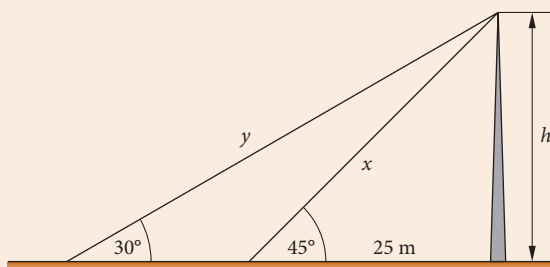
4. Adott az  $ABC$  derékszögű háromszög, melyben  $CA = CB = 8$  egység. Rajzolj olyan egyenlő oldalú háromszöget, melynek egyik oldala az  $AB$  szakasz, és jelöld a háromszög harmadik csúcsát  $D$ -vel! Határozd meg a  $CD$  távolság pontos értékét! Hány lehetséges megoldás van?

## HÁZI FELADAT

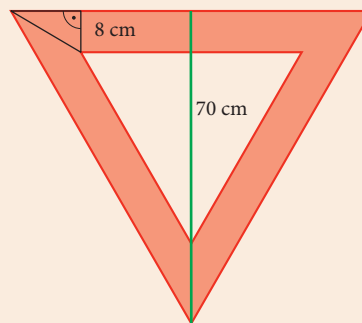
1. Számítsd ki az ismeretlen hosszúságokat! (Az ábrán két szabályos hatszöget és két négyzetet látsz, a szaggatott vonalak oldalfelező pontokat, illetve csúcsokat kötnek össze.)



2. Milyen magas a torony ( $h$ ), milyen hosszúak a tartókötelek ( $x$  és  $y$ ), és milyen messze van a toronylábától a talajon fekvő távolabbi rögzítőpont, ha a közelebbi 25 m-re van?



3. Az „elsőbbségadás kötelező” tábla magassága 70 cm, a szélén levő piros sáv pedig 8 cm széles.



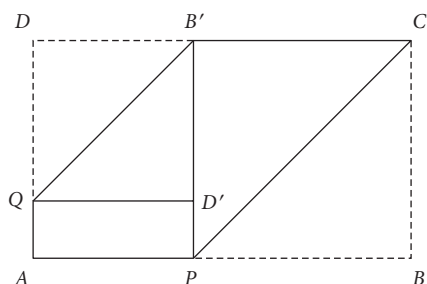
Mekkora a belső, fehérén hagyott szabályos háromszög oldala?

(Útmutatás: először a fehér szabályos háromszög magasságát célszerű kiszámítani, majd ennek ismeretében a háromszög oldalát.)

## EMELT SZINT

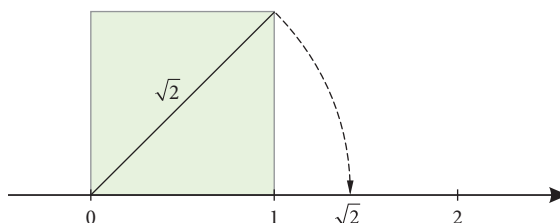
### FELADAT

1. Az  $ABCD$  téglalap alakú lapot az alábbi ábrán látható módon hajtottuk. Első lépésben az eredeti  $B$ -vel jelölt csúcsot helyeztük el a téglalap  $CD$  oldalán ( $B'$ ) úgy, hogy a felhajtott rövidebb oldal illeszkedjen a téglalap hosszabbik oldalára. Második lépésben a  $D$ -vel jelölt csúcsot illesztettük az előbb kapott „új”  $B'P$  szakaszra úgy, hogy egyúttal a  $D'B'$  szakasz is illeszkedjen  $B'P$  szakaszra.



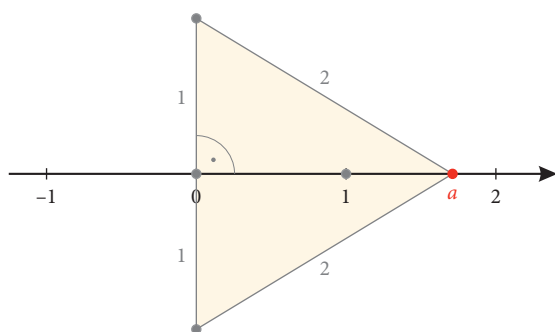
- a) Igazoljuk, hogy a  $PC$  szakasz párhuzamos a  $QB'$  szakasszal!
- b) Határozzuk meg az  $APCB'Q$  sokszög területét és területét, ha a téglalap oldalainak hossza  $AB = a$  és  $BC = b$  ( $a > b$ )!

2. A 22. leckében említettük, hogy a számegyenesen a  $\sqrt{2}$  helyét a Pitagorasz-tétel segítségével meg lehet szerkeszteni. Az eljárást az ábra mutatja:



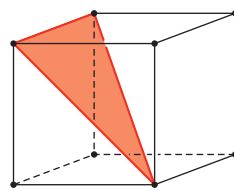


- a) Melyik valós szám helyét szerkesztettük meg a számegyenesen?



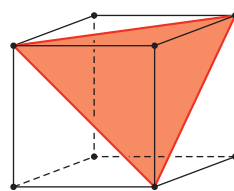
- b) Szerkessz  $\sqrt{5} - \sqrt{3}$  hosszúságú szakaszt Pitagorasz-tételének segítségével, ha adott egy egység hosszúságú szakasz!

3. Mekkora az ábrán jelölt háromszög oldalai, ha a kocka éle egységnyi hosszúságú?



4. a) Mekkora az alábbi ábrán látható háromszög területe, ha a kocka élei 6 cm-esek?

- b) Készítsd el a kockából a színes háromszög által levágott gúla hálóját, ha a kocka élei 6 cm-esek! Mekkora ennek a gúlának a felszíne?



## RÁADÁS

Az ókori Egyiptom földmérői és építészei a derékszögek szerkesztéséhez a következő eljárást használták: egy kötélre azonos távolságokban 13 csomót kötöttek, majd az első és a 13. csomót összefogva úgy feszítették ki a kötelet háromszög alakban, hogy az oldalak 3, 4 és 5 csomóköz hosszúak legyenek. Az így kapott háromszög rövidebb oldalai között mérhető szög pontosan  $90^\circ$ , hiszen Pitagorasz tételének megfordítása értelmében az ilyen háromszög derékszögű.

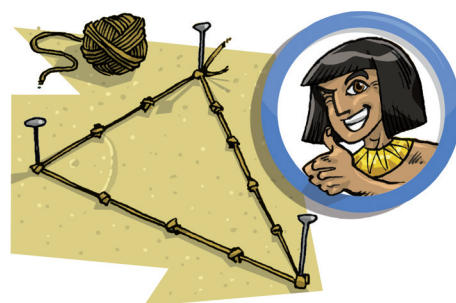
### Pitagorasz számhármak

Ha három pozitív egész szám közül kettő négyzetének összege egyenlő a harmadiknak a négyzetével, akkor ezekre azt mondjuk, hogy pitagorasz számhármast alkotnak. Végtelen sok pitagorasz számhármast van.

*Például*

3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 8, 15, 17; 9, 40, 41; 33, 56, 65; 48, 55, 73; 39, 80, 89.

Az ilyen oldalhosszúságú háromszögek derékszögűek.



## FELADAT

- Legyen  $k$  és  $l$  két pozitív egész szám, és  $k > l$ . Igazold, hogy  $2kl$ ,  $k^2 - l^2$  és  $k^2 + l^2$  pitagorasz számhármast alkotnak!
- Adj meg olyan pitagorasz számhármast, amelyek egyik tagja 20! Használd az internetet!
- Létezik-e olyan derékszögű háromszög, amelynek minden oldala egész hosszúságú és az egyik oldala 1 egység? Ha létezik, milyen hosszúak az oldalai? Ha nem létezik, miért nem létezhet?
- Létezik-e olyan derékszögű háromszög, amelynek minden oldala egész hosszúságú és az egyik oldala 2 egység? Ha létezik, milyen hosszúak az oldalai? Ha nem létezik, miért nem létezhet?

## BEVEZETŐ I.

(Kompetenciamérés, 2007)

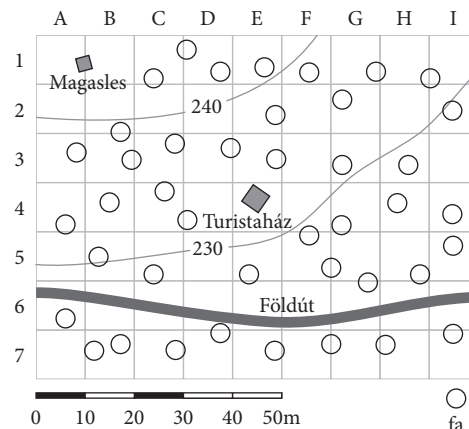
Az alábbi térképen az azonos tengerszint feletti magasságú helyeket egy úgynevezett szintvonallal kötötték össze. A számértékek a tengerszint feletti magasságot jelzik méterben.

Egy kirándulás vezetői kincsvadászatot rendeznek a térképen ábrázolt területen. A gyerekeknek a fenti térkép és négy információ alapján kell minél hamarabb megtalálniuk a kincset.

- A kincs egy fán van elrejtve.
- A fától 30 m-re egy turistaház található.
- A kincs a földúttól 20 m-re van.
- A keresett hely 233 m tengerszint feletti magasságban van.

Jelöld meg X-szel a térképen azt a mezőt, ahol a kincs található!

Sikerült megtalálnod a kincset?



## ELMÉLET

Az euklideszi geometria **alapfogalmai a pont, az egyenes, a sík, a tér** (közös néven térelemek) és az **illeszkedés**. (Az alapfogalmakat nem definiáljuk, hanem az azokról kialakított szemléletes képet használjuk a geometriai fogalmak megalkotása során).

## Térelemek távolsága

**Definíció:** Két pont távolsága az általuk meghatározott szakasz hossza. Ha a két pont  $P$  és  $Q$  egybeesik, akkor távolságuk nulla.

A távolság megadása egy nemnegatív valós számmal és egy mértékegységgel történik.

Ha a mértékegység mm, akkor a két pont ( $P$  és  $Q$ ) távolsága 240 mm, ha cm, akkor 24 cm, ha dm, akkor 2,4 dm.

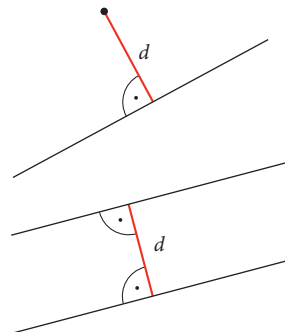
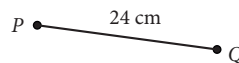
**Definíció:** Ha két térelemnek van közös pontja, akkor a távolságuk 0. Ha nincs közös pontjuk, akkor a pontjaik közötti távolságok közül a *legkisebbet* nevezzük a **két térelem távolságának**. Jele gyakran:  $d$  (távolság; latinul *distancia*).

**Pont és egyenes távolsága** a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.

Ha a pont illeszkedik az egyenesre, akkor távolságuk nulla.

Két különböző egyenes **párhuzamos**, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk. (A pontos matematikai definíció szerint minden egyenes önmagával is párhuzamos.)

**Két párhuzamos egyenes távolsága** az egyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől való távolsága.



**Pont és sík távolsága** a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza.

Ha a pont illeszkedik a síkra, akkor távolságuk nulla.

Egy egyenes **merőleges egy síkra**, ha az egyenes merőleges az egyenes és a sík metszéspontjára illeszkedő minden síkbeli egyenesre. Bizonyítható, hogy a merőlegességhez elegendő az is, hogy az adott egyenes a sík két egyenesére merőleges legyen, az ábrának megfelelően.

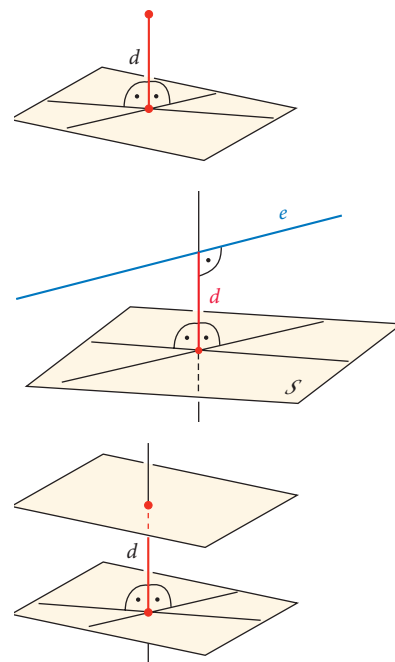
Egy egyenes és egy sík párhuzamosak, ha nincs közös pontjuk. (A pontos definíció szerint a síkra illeszkedő egyeneseket is párhuzamosnak tekintjük a síkkal.)

**Sík és azzal párhuzamos egyenes távolsága** az egyenes egy tetszőleges pontjának a síktól való távolsága.

Két sík párhuzamos, ha nincs közös pontjuk. (A pontos definíció szerint két egybeeső síkot is párhuzamosnak tekintünk egymással.)

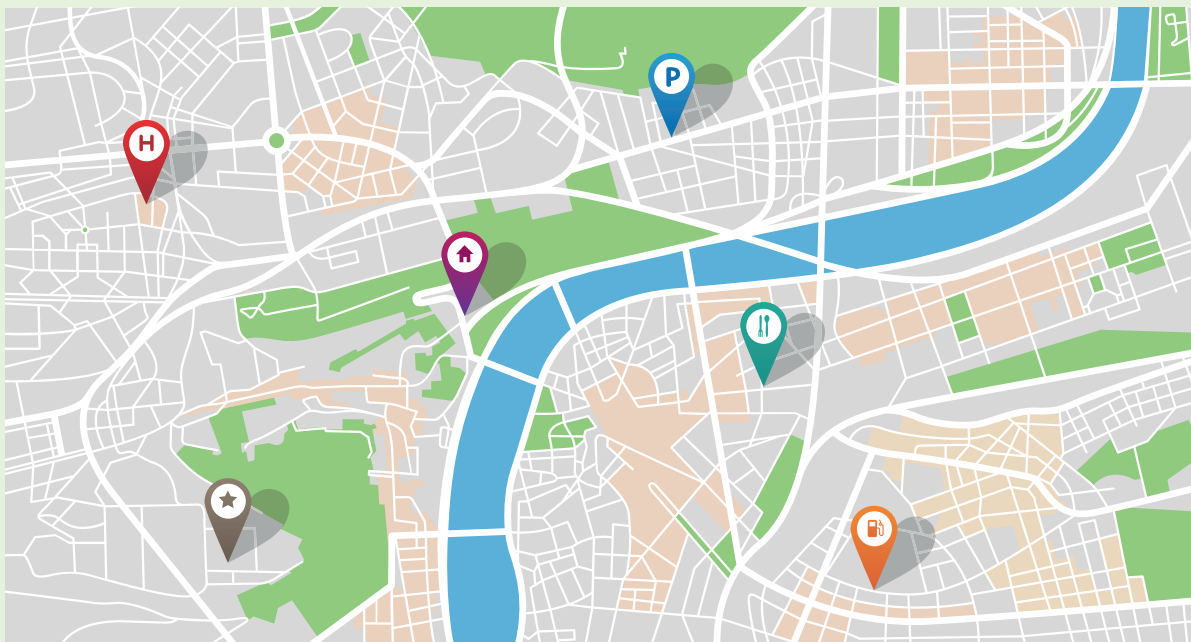
**Párhuzamos síkok távolsága** az egyik sík egy tetszőleges pontjának a másik síktól való távolsága.

A fentiek alapján kimondhatjuk, hogy a távolságot jelentő legrövidebb szakasz mindig az egyenesre vagy síkra állított merőleges egyenesen található.



## FELADAT

1. Az alábbi várostérképen megjelöltük egy kórház, egy parkolóház, egy szálláshely, egy étterem, egy benzinkút és egy történelmi nevezetesség helyét.



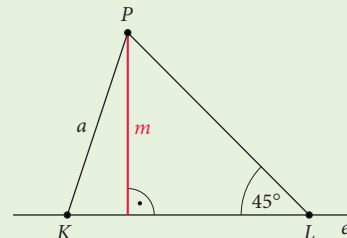
A térkép méretaránya 1: 20 000.

- Állapítsd meg, hogy a piktogramok közül melyik mit jelölhet!
- Vonalzó segítségével mérd le a kórház és szálláshely, valamint a parkolóház és benzinkút közötti (légvonalban mért) távolságot! A méretarány alapján fejezd ki a valós távolságokat km-ben!

- c) Határozd meg, hogy a kijelölt helyektől hány km-t kellene gyalognunk „árkon-bokron” keresztül, hogy legrövidebb úton a folyópartra érkezzünk!
- d) Keresz megfelelő módszert – akár segédeszköz használatával – arra vonatkozóan, hogy hogyan lehet megállapítani annak a folyószakasznak a hozzávetőleges hosszát, amit a térképen látunk! Használd a módszered, határozd meg a kért hossz!

2. Egy szabályos háromszög oldalai 9 cm hosszúak. Egyik oldalán kijelöljük az oldal egyik harmadoló pontját. Milyen távol van ez a pont a másik két oldalegyenestől? Készíts ábrát!

3. Az ábrán a  $K$  és  $L$  pontok távolsága 8 m, az  $L$  és  $P$  pontok távolsága 6 m, az  $LP$  szakasz  $45^\circ$ -os szöget zár be az  $e$  egyenessel. Számítsd ki a  $P$  pont és az  $e$  egyenes távolságát, majd a  $P$  és  $K$  pontok távolságát is!

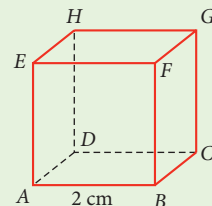


4. Mekkora a kocka éleinek a távolsága

- a) a  $C$  ponttól; b) az  $AB$  egyenestől; c) a  $BCGF$  síktól?

Töltsd ki az alábbi táblázatot, dolgozz a füzetedben!

|                    | 0 távolságra van | 2 távolságra van | $2\sqrt{2}$ távolságra van |
|--------------------|------------------|------------------|----------------------------|
| A $C$ ponttól      |                  |                  |                            |
| Az $AB$ egyenestől |                  |                  |                            |
| A $BCGF$ síktól    |                  |                  |                            |



## BEVEZETŐ II.

A lengőteke (más néven kugli) igen népszerű játék. Lényege, hogy kijelölt távolságból úgy kell meglóditani egy kötélre kötött golyót, hogy az minél több bábut ledöntsön. Péter lengőtekével játszik, de egy ügyetlen mozdulattal úgy engedte el a kötélre lévő golyót, hogy az a játékot tartó rúdnak csapódott. Hová csapódott a golyó, ha közben feszes maradt a kötél? Melyik a helyes válasz betűjele?

(Kompetenciamérés, 2009)

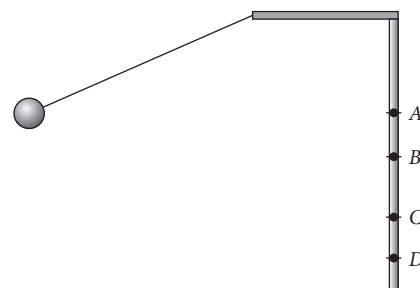
A vonalzód, a körződ vagy egy cérnaszál segítségével könnyen kideríthetted, hogy hol van a rúdnak az a pontja, mely ugyanakkora távolságra van a kötél rögzítési pontjától, mint a golyó. Ez alapján a helyes válasz a C.

Az ovisok tudják, hogyan kell elhelyezkedniük, ha körjátékot akarnak játszani.

A kertésznek nem okoz problémát, ha azt kéri tőle, hogy a kerítés vonalától egyenlő távolságra ültesse el a virágpalántákat.

Ha azt halljuk, hogy a Föld ellipszispályán kering a Nap körül, akkor el tudjuk képzelni, mit értsünk ez alatt. (Ha ez mégsem sikerül, akkor keress Kepler I. törvényére vonatkozó képet és leírást az interneten!)

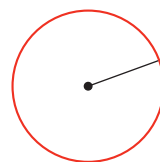
Az előbbi példák is azt mutatják, hogy hétköznapi tapasztalatunk van arról, hogy milyen lehet különböző geometriai alakzatok formája.



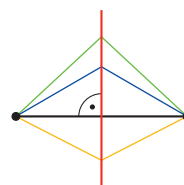
### Távolsággal megadható nevezetes ponthalmazok a síkban

A matematikában az adott tulajdonságú pontok összességét **mértani helynek**, ezek közül a speciális tulajdonsággal rendelkezőket **nevezetes ponthalmaznak** nevezzük.

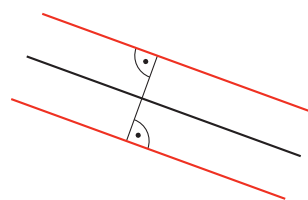
A sík egy adott pontjától adott távolságra lévő pontok halmaza a **körvonal** (röviden **kör**). Az adott pont a **kör középpontja**, az adott távolság a **kör sugara**.



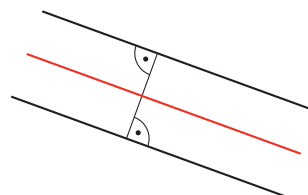
A sík két pontjától egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban a két pont által meghatározott **szakasz felezőmerőleges egyenese**. A felezőmerőleges illeszkedik a szakasz felezőpontjára, és merőleges a szakaszra.



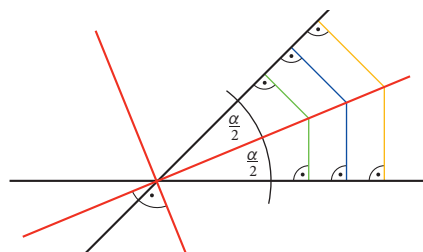
A sík egy egyenesétől adott távolságra lévő pontok halmaza a síkon két olyan egyenes, melyek párhuzamosak az eredeti egyenessel, és amelyek távolságát felezi az eredeti egyenes.



A sík két párhuzamos egyenesétől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két egyenes **középpárhuzamosa**. A középpárhuzamos a két egyenessel párhuzamos és távolságukat felezi.



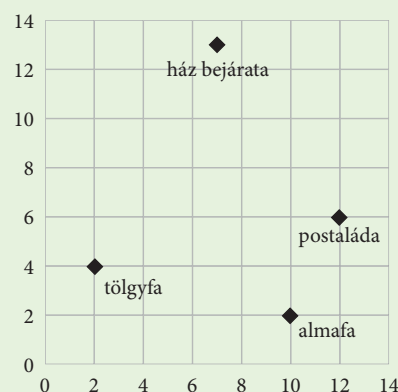
A sík két metsző egyenesétől egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkon a két egyenes által meghatározott szögek **szögfelező egyenesei**, melyek merőlegesek egymásra.



### FELADAT

#### 5 (Kompetenciamérés, 2013)

Zsófi egy kincsesládát ástott el a kertjükben, térképet is készített a helyéről. A kincsesládát a tölgyfától és az almafától ugyanolyan távolságra ásta el úgy, hogy egyenlő távolságra legyen a postaládától és a ház bejáratától is. Melyik koordinátájú helyen áshatta el a kincsesládát?

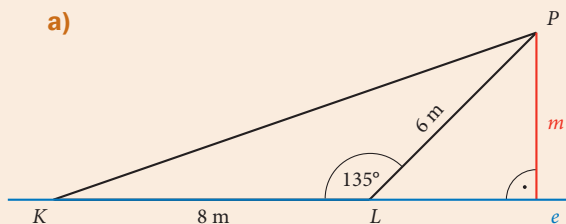




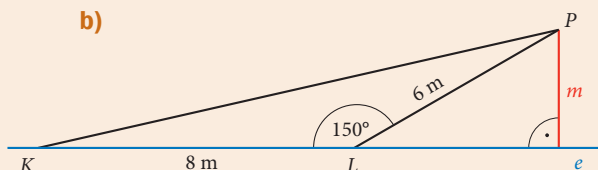
## HÁZI FELADAT

1. Számítsd ki a  $P$  pont és az  $e$  egyenes távolságát, majd a  $P$  és  $K$  pontok távolságát is!

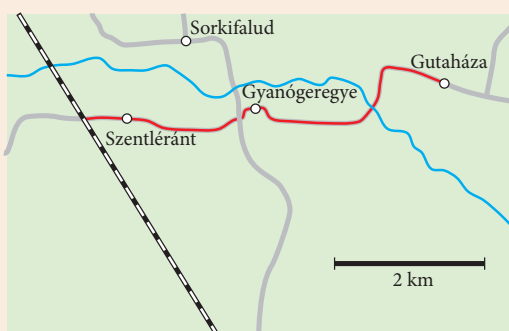
a)



b)



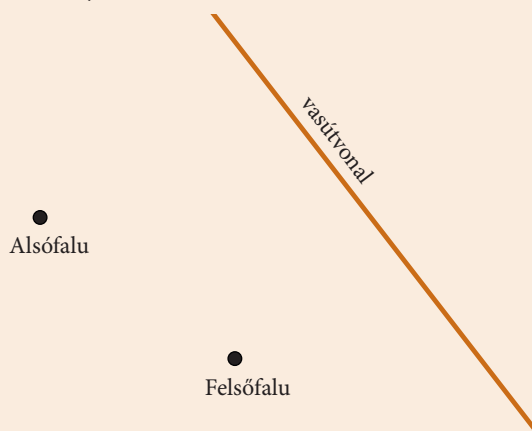
2. Milyen messze van Gutaháza légvonalban a vasútvonaltól? Valójában körülbelül mekkora utat tesz meg az, aki a Gyanógeregyén és Szentléránton keresztül vezető úton jut el a vasútvonalhoz? (Mennyire lehetnek pontosak az eredményeid?)



3. Milyen távol van a 6 cm oldalú kocka középpontja

- a) az oldallapoktól;  
b) az oldalélektől;  
c) a csúcsoktól?

4. Alsófalú és Felsőfalú közös vasútállomást szeretne a vasútvonal mellé úgy, hogy egyenlő távolságra legyen a két helységtől. Szerkeszd meg a vasútállomás helyét a füzetedben!



5. Adott a sík egy  $P$  pontja és három, egymással párhuzamos egyenes, az  $e$ , az  $f$  és a  $g$ . Tudjuk, hogy a  $P$  pont és az  $e$  egyenes távolsága 2 cm, a  $P$  pont és az  $f$  egyenes távolsága 6 cm, a  $P$  pont és a  $g$  egyenes távolsága 7 cm. Mekkora lehet az egyenesek távolsága?

## RÁADÁS

1. A távolságmérés térképen viszonylag könnyű feladatnak látszik. Csak összekötjük a keresett pontokat, megmérjük vonalzóval az összekötő szakasz hosszát, és megszorozzuk a térkép méretarányával (pl. 1 : 25 000 léptékű térképen egy 5 cm-es távolság a valóságban  $5 \cdot 25\,000 = 125\,000$  centiméter, azaz 1250 méter vagy 1,25 km lenne). Nagyobb földrajzi távolságoknál azonban jelentős eltérést okoz, hogy a Föld felszíne nem lapos, hanem többé-kevésbé gömbfelület. Mindez azt jelenti, hogy legtöbbször a térképen sem mérhetünk nagyobb távolságokat egyenes mentén.

A gömbölyű földfelszínen két pont távolságát már nem egyenes, hanem *körív* mentén kell mérnünk, mégpedig olyan kör ívéen, amely áthalad a két ponton, középpontja a Föld középpontja, és így sugara a Föld sugarával egyenlő.



## 2. Az egyik földrész területe

Az ábrán az Antarktisz térképe látható.

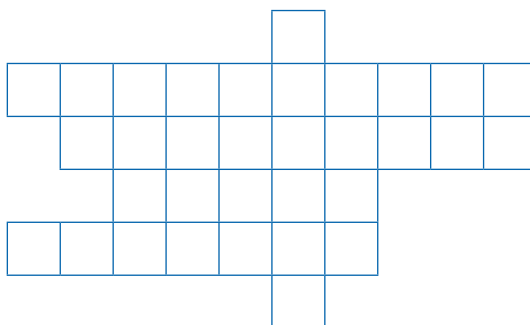
- Mekkora a távolság a Menzies-hegy és a Déli-sark között? (A becsléshez használd a térkép méretarányát!)
- Becsüld meg az Antarktisz területét a térképen feltüntetett méretarány segítségével! Írd le a számításaidat és azt, hogyan végezted el a becslést!



## 3. Biztos? Lehetséges? Lehetetlen?

A megfelelő válaszhoz tartozó szót írd a rejtvényábra megfelelő sorába! A függőleges oszlop egy híres magyar sportoló, háromszoros olimpiai bajnok vezetéknevét rejt. Ki ő?

|                                                                                                                                                                                                                                   | Biztos     | Lehetséges | Lehetetlen |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------|------------|
| Egy derékszögű háromszög egyik oldala 3 cm, másik oldala 4 cm hosszú.<br>Biztos, lehetséges vagy lehetetlen, hogy a harmadik oldal 5 cm hosszú?                                                                                   | PITAGORASZ | PONTHALMAZ | SZIMMETRIA |
| $P$ és $Q$ pontok távolsága $10^2$ cm. $P$ és $R$ pontok távolsága $10^3$ cm.<br>Biztos, lehetséges vagy lehetetlen, hogy $Q$ és $R$ pontok távolsága $10^5$ cm?                                                                  | DERÉKSZÖG  | SZABÁLYOS  | MERŐLEGES  |
| Az $AB$ szakaszfelező merőlegese a síkon a $t$ egyenes. Ugyanezen a síkon lévő $P$ pontról tudjuk, hogy ugyanolyan távol van $A$ -tól, mint $B$ -től.<br>Biztos, lehetetlen vagy lehetséges, hogy $P$ a $t$ egyenes egy pontja?   | VONALZÓ    | EGYENES    | HATSZÖG    |
| A $t$ egyenes az egymást metsző $e$ és $f$ egyenesek szögfelezője. A metsző egyenesek síkjában lévő $P$ pont ugyanolyan távol van $e$ -től, mint $f$ -től. Biztos, lehetetlen vagy lehetséges, hogy $P$ a $t$ egyenes egy pontja? | HOSSZ      | CSÚCS      | MÉRÉS      |



# 44 A KÖR

## BEVEZETŐ



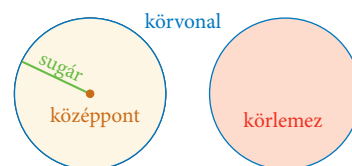
Hétköznapijaink egyik leggyakoribb formája a kör, vagy annak egy összefüggő része, a körív. Elég, ha közvetlen környezetünkben körülpillantunk, máris szemünkbe ötlik egy pohár, az óra számlapja, egy CD vagy DVD, egy fém pénz, a nyomógombok és így tovább. Az építészetben is kedvelt díszítőelemek a körívek, az érintkező és metsző körök. De körpályán mozognak a rögzített tengely körül forgó testek pontjai is.



## ELMÉLET

Adott egy kör a középpontjával és a sugarával.

A síknak azok a pontjai, amelyek kisebb távolságra vannak a kör középpontjától, mint amekkora a sugár, **nyílt körlemez** (körlapot) alkotnak. Ha ehhez hozzávesszük még a körvonalat is, akkor **zárt körlemezhez** (körlaphoz) jutunk. Ha csak egyszerűen **körlemez** említünk, akkor **zárt körlemezre** gondolunk.

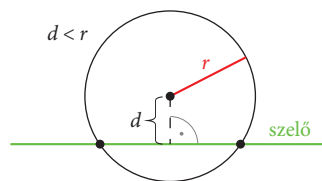
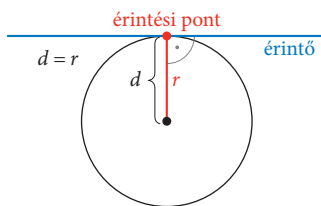
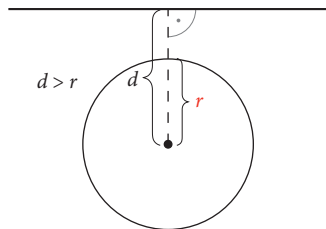


A körnek minden olyan egyenes szimmetriatengelye, amely benne van a síkjában, és átmegy a középpontján.

Egy síkban egy körvonalnak és egy egyenesnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet. A közös pontok száma attól függ, mekkora távolságra van az egyenes a kör középpontjától.

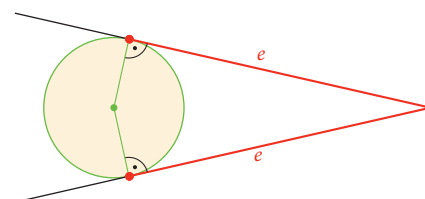
Ha az egyenes és a kör középpontjának a távolsága

- nagyobb a kör sugaránál, akkor nincs közös pontjuk (vagyis 0 a közös pontok száma);
- egyenlő a kör sugarával, akkor 1 közös pont van; az ilyen egyenest a kör **érintőjének** nevezzük;
- kisebb a kör sugaránál, akkor 2 közös pontjuk van; az ilyen egyenest a kör **szelőjének** nevezzük.



**Tétel:** A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugarra.

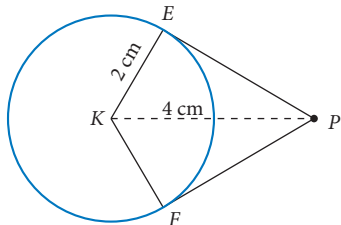
**Tétel:** Egy körhöz a síkjának egy körön kívüli pontjából két érintő húzható. A körön kívüli pont és az érintési pont által meghatározott két **érintő szakasz** ( $e$ ) egyenlő hosszúságú.



## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A  $KP$  szakasz hossza 4 cm. A  $P$ -ből két érintőt húzunk a  $K$  középpontú, 2 cm sugarú körhöz, az érintési pontok  $E$  és  $F$ .

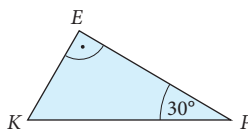
- a) Milyen hosszú az  $EP$  és az  $FP$  érintő szakasz?  
b) Mekkora az  $EF$  szakasz hossza?



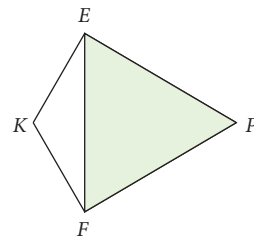
Megoldás

- a) Az  $EKP$  háromszögnek az  $E$  csúcsnál derékszöge van, mert az érintő merőleges az érintési pontba vezető sugarra. Az átfogó kétszer akkora, mint az egyik befogó,

tehát ez egy szabályos háromszög fele. Ezért a harmadik oldal, az  $EP$  érintő szakasz hossza  $2\sqrt{3}$  cm. Ugyanekkora az  $FP$  érintő szakasz is.

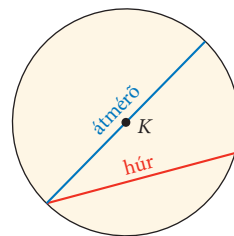


- b) Az  $EKP$  háromszög  $P$  csúcsnál lévő szöge  $30^\circ$ -os. Ugyanekkora a  $KPF$  szög is, tehát az  $EPF$  szög  $60^\circ$ -os. Az  $EPF$  háromszög két oldala egyenlő, a közöttük lévő szög pedig  $60^\circ$ -os. Ez csak úgy lehetséges, ha ez a háromszög egyenlő oldalú, vagyis  $EF = EP = 2\sqrt{3}$  (cm).



## ELMÉLET

A szelőnek a körlemezen lévő szakaszát a kör **húrjának** nevezzük. A kör középpontján átmenő húr neve **átmérő**; ez kétszer olyan hosszú, mint a sugar. Az átmérő a kör leghosszabb húrja.

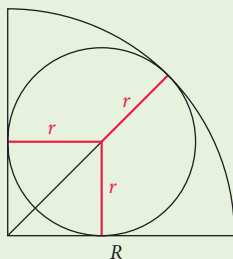


## FELADAT

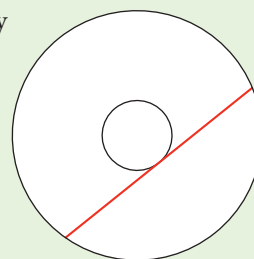
1. Egy 6,5 cm sugarú kör egyik húrja 11,2 cm hosszú. Mekkora távolságra van ez a húr

- a) a kör középpontjától;  
b) a rá merőleges átmérő két végpontjától?

2. Egy negyed körrel határolt körcikkbe olyan kisebb kört rajzoltunk, amely érinti a körcíkket határoló körívet és a két sugarat. A körcíkket egy  $R$  sugarú körből vágtuk ki, a kis kör sugara pedig  $r$ . Mekkora a köríkk  $R$  sugara, ha  $r = 4$  cm?



3. Egy 7 mm sugarú és egy 25 mm sugarú körnek ugyanaz a középpontja (**koncentrikus körök**). Milyen hosszú a nagyobbik körnek az a húrja, amely érinti a kisebbik kört?



4. Mit alkot az összes olyan pont, amelyből egy 3 cm sugarú körhöz 4 cm hosszúságú érintő szakasz húzható?

## KIDOLGOZOTT FELADAT

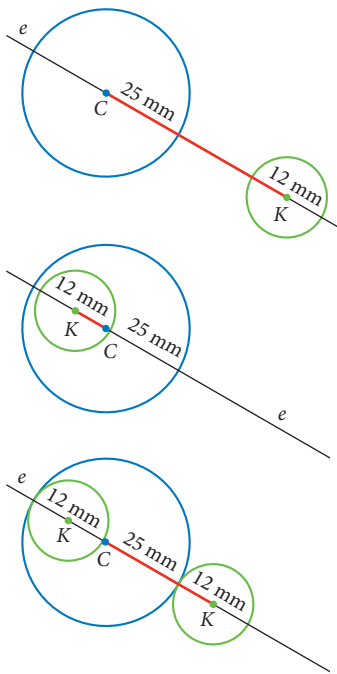
2. A  $C$  középpontú kör sugara 25 mm, a  $K$  középpontúé 12 mm. Az  $e$  egyenes illeszkedik a két kör középpontjára (**centrális egyenes**). A kisebb sugarú kört mozgatjuk az  $e$  egyenes mentén. Hány közös pontja lehet a két körvonalnak?

Megoldás

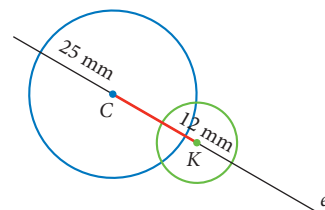
Könnyen látható, hogy ha  $CK > 25 + 12 = 37$ , akkor a két körvonalnak nincs közös pontja;

ha  $CK < 25 - 12 = 13$ , akkor sincs a két körvonalnak közös pontja;

ha  $CK = 37$ , vagy  $CK = 13$ , akkor a két körvonalnak egy közös pontja van (**érintik egymást**);



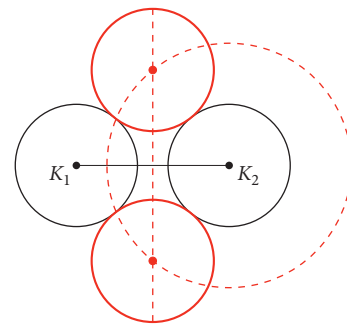
ha  $13 < CK < 37$ , akkor a két körvonal **met-szi egymást**, két közös pontjuk van.



3. Adott két 1 cm sugarú kör, amelyek középpontja 2,5 cm-re van egymástól. Szerkessz egy 1 cm sugarú harmadik kört, amely mindkettőt érinti!

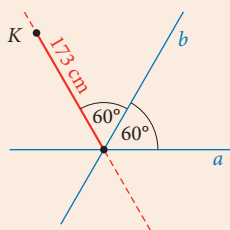
Megoldás

A szerkesztendő harmadik kör középpontja mindkét adott kör középpontjától 2 cm távolságra van. Tehát rajta van a  $K_1K_2$  szakasz felezőmerőlegesén és a  $K_2$  körül 2 cm sugárral írt körön is. E körnek és a felezőmerőlegesnek a közös pontja lehet a szerkesztendő kör középpontja. Mindkét pont megfelel, tehát két 1 cm sugarú, érintő kör szerkeszthető.



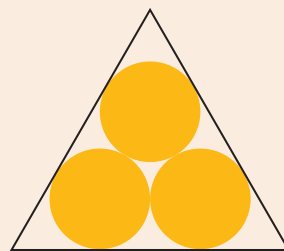
## HÁZI FELADAT

1. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja a  $K$  pont, és érinti mindkét egyenest ( $a$ -t és  $b$ -t)? Mekkora távolságra van a  $K$  pont ezektől az egyenesektől?



2. Egy 8 cm sugarú körben adott egy 9,6 cm hosszú húr. Mekkora annak a körnek a sugara, amelyik koncentrikus az adott körrel, és érinti az adott húrt?
3. Adott három 1 cm sugarú kör úgy, hogy a középpontjaik nincsenek egy egyenesen. Szerkessz egy kört, amelyik mindhárom adott kört érinti!

4. Egy (szabályos) háromszög alakú ablakkeretet szeretnénk készíteni három színes ablaküveg köré, melyek mindegyike 30 cm sugarú körlemez. A körökön kívül eső részt átlátszó üvegből készítjük. Hogyan válasszuk meg a keret oldalainak hosszát, ha azt szeretnénk, hogy az üveg körlemez (az ábrán látható módon) páronként érintsék egymást, és mindegyik érintse a keret oldalait is? Válaszd cm-ben, egészekre kerekítve add meg!



A GeoGebra programmal ellenőrizheted a szerkesztéseid helyességét is.



## ELMÉLET

## Definíció

Egy adott kör síkjában azokat az egyeneseket nevezzük a kör **érintőinek**, amelyeknek egy közös pontjuk van a körrel.

A közös pontot **érintési pontnak** nevezzük.

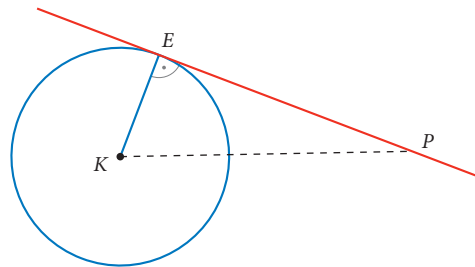
## I. tétel

A kör érintője merőleges az érintési pontba vezető sugárra.

*Első bizonyítás*

Használjuk az ábra jelöléseit!

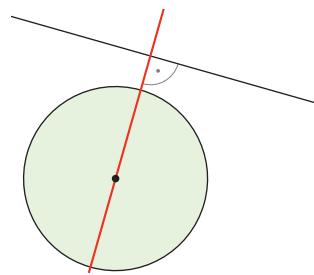
Az érintő  $E$  pontja (az *érintési pont*) sugárnyi távolságra van a kör középpontjától, a többi pontja pedig ennél nagyobb távolságra. Egy pont és egy egyenes pontjai között a legkisebb távolság a merőlegesen mérhető, tehát az  $EK$  egyenes merőleges az érintőre.



*Második bizonyítás*

(Ebben a bizonyításban felhasználjuk, hogy ha a kör középpontjából merőleges egyenest állítunk a kör síkjának bármely egyenesére, akkor a merőleges közös szimmetriatengelye lesz a körnek és az egyenesnek.)

Tükrözzük a kör középpontjából az érintőre állított merőleges egyenesre a kört és az érintőt! Ha az érintési pont nem lenne rajta a merőlegesen, akkor a tükröképe is közös pontja lenne a körnek és az érintőnek. Ez azonban lehetetlen, hiszen ezeknek csak egy közös pontjuk van. Tehát az érintési pont rajta van az érintőre állított merőlegesen, vagyis az érintési pontba vezető sugár valóban merőleges az érintőre.



Ez a bizonyítás arra támaszkodik, hogy ha nem lenne igaz a merőlegesség, akkor ellentmondásba kerülnénk az eredeti feltevéssel. Az ilyen gondolatmenetet szokás **indirekt bizonyításnak** mondani.

## II. tétel

Egy körhöz külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő.

*Első bizonyítás*

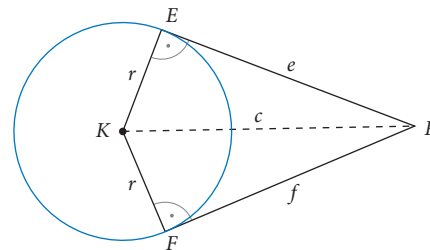
Használjuk az ábra jelöléseit!

Az  $EKP$  derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele szerint  $e^2 = c^2 - r^2$ , az  $FKP$  derékszögű háromszögben pedig  $f^2 = c^2 - r^2$ . Tehát  $e^2 = f^2$ , vagyis  $e = f$ .

*Második bizonyítás*

Használjuk az ábra jelöléseit!

Tükrözzük a  $KP$  egyenesre a kört és a  $PE$  érintő egyenesét! A tükrözés tulajdonságai miatt egy olyan, a  $P$  ponton átmenő egyenest kapunk, amely az  $E$  pont  $F$  tükröképében érinti a kört. A szimmetria miatt tehát a  $PE$  érintő szakasz hossza megegyezik a  $PF$  érintő szakasz hosszával.



## BEVEZETŐ

A fotókon megjelenő zavaró árnyékok kiküszöbölésére a fényképezetben három fényforrással egyszerre világítják meg a lefényképezni kívánt tárgyat. Ennek az eljárásnak nagyon fontos eleme, hogy a tárgynak a három fényforrás mindegyikétől egyforma távolságra kell lennie. Pontosan hová helyezzük a tárgyat, ha adott a három fényforrás helye?



## Megoldás

Tudjuk, hogy egy síkban a sík két pontjától egyenlő távolságra lévő pontok a két pont között húzott szakasz felezőmerőlegesén találhatók. Mivel a tárgynak bármely két lámpától egyforma messze kell lennie, ezért rajta lesz minden olyan szakasz felezőmerőlegesén, amelyet két-két lámpa közé húztunk, azaz az ilyen felezőmerőlegesek metszés-pontjában kell lennie.



## ELMÉLET

**Definíció:** A háromszög oldalának felezőmerőleges egyenesét a háromszög **oldalfelező merőlegesének** nevezzük.

Azt a kört, melyre illeszkedik egy adott háromszög mindhárom csúcsa, a **háromszög köré írható körnek** (vagy másként: **körülírt körnek**) nevezzük. Minden háromszög esetén egyetlen ilyen kör található.

**Tétel:** A háromszög három oldalfelező merőlegese egy pontban metszi egymást. Ez a pont egyenlő távol van a háromszög csúcsaitól, ezért ez a pont a **háromszög köré írható kör középpontja**.

## Bizonyítás

Felhasználjuk, hogy a sík két pontjától egyenlő távol lévő pontok halmaza a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegesese. (Ez az állítás a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból levezethető.)

Az  $AB$  és a  $BC$  oldalak felezőmerőlegesének metszéspontja legyen  $K$ .

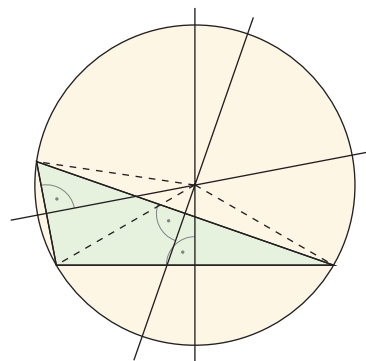
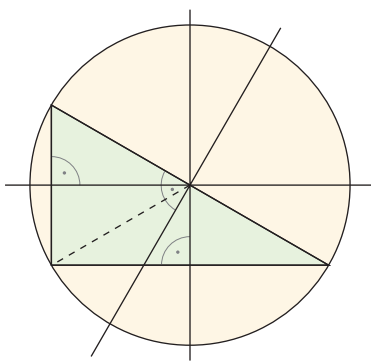
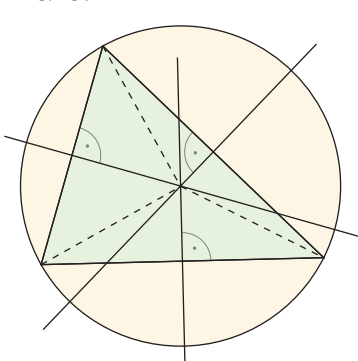
$K$  rajta van az  $AB$  oldal felezőmerőlegesén, ezért egyenlő távol van  $A$ -tól és  $B$ -től:  $KA = KB$ .

$K$  rajta van a  $BC$  oldal felezőmerőlegesén, ezért egyenlő távol van  $B$ -től és  $C$ -től:  $KB = KC$ .

$KA = KB$  és  $KB = KC$ , ezért  $KA = KC$ .

$K$  egyenlő távol van tehát  $A$ -tól és  $C$ -től, ezért  $K$  rajta van az  $AC$  felezőmerőlegesén is. Vagyis  $AC$  felezőmerőlegese is átmegy a  $K$  ponton. Ezzel beláttuk a tételt.

### Megjegyzés:



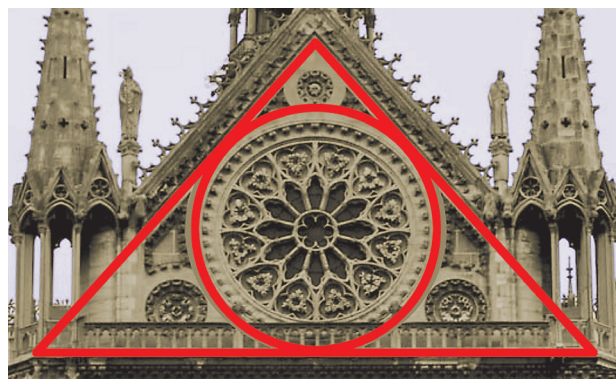
A háromszög köré írható kör középpontja hegyesszögű háromszög esetében a háromszög belsejében, derékszögű háromszög esetében az átfogó felezőpontjában, tompaszögű háromszög esetében a háromszögön kívüli síkrészben van.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Ez a fotó a párizsi Notre-Dame egyik ún. „rózsaablakáról” készült. Hogyan kell megszerkeszteni az ablak körének középpontját és sugarát, hogy az „illeszkedjen” a háromszögbe, azaz a háromszög oldalai éppen érintsék a kört?

### Megoldás

Tudjuk, hogy egy konvex szögtartományban a szög két szárától egyenlő távolságra levő pontok a szögfelező félegyenesen találhatók. Mivel a kör középpontjának bármely két oldaltól egyenlő távol kell lennie, ezért két szögfelezőn is rajta kell lennie, vagyis két szögfelező metszéspontjában van.



## ELMÉLET

**Definíció:** A háromszög belső szögének szögfelező félegyenesét a háromszög **belső szögfelezőjének** nevezzük. (Sokszor így nevezzük a félegyenesnek a háromszög belsejébe eső **szakaszát** is.)

Azt a kört, amely adott háromszög mindhárom oldalát érinti, a **háromszögbe írható körnek** nevezzük. Minden háromszög esetén egyetlen ilyen kör található.

**Tétel:** A háromszög három belső szögfelezője egy pontban metszi egymást. Ez a pont egyenlő távol van a háromszög oldalegyeneseitől, ezért ez a pont a **háromszögbe írható kör** középpontja.

### Bizonyítás

Felhasználjuk, hogy egy konvex szögtartományban a szög két szárától egyenlő távol lévő pontok halmaza a szögfelező félegyenes. (Ez az állítás a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból levezethető.)

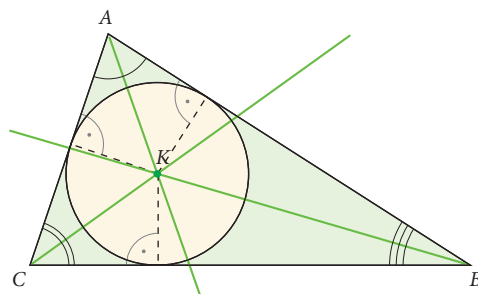
A  $\sphericalangle CAB$  és az  $\sphericalangle ABC$  szögfelezőinek metszéspontja legyen  $K$ .

$K$  rajta van a  $\sphericalangle CAB$  szögfelezőjén, ezért egyenlő távol van az  $AB$  és az  $AC$  szögszáraktól.

$K$  rajta van az  $\sphericalangle ABC$  szögfelezőjén, ezért egyenlő távol van az  $AB$  és a  $BC$  szögszáraktól.

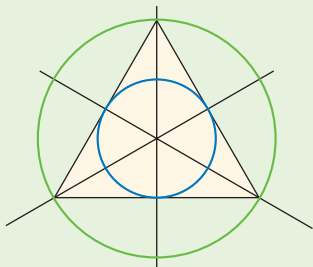
Ezekből következik, hogy  $K$  egyenlő távol van az  $AC$  és a  $BC$  szögszáraktól is, ezért  $K$  rajta van a  $\sphericalangle BCA$  szögfelezőjén is.

Vagyis  $\sphericalangle BCA$  szögfelezője is átmegy a  $K$  ponton. Ezzel beláttuk a tételt.



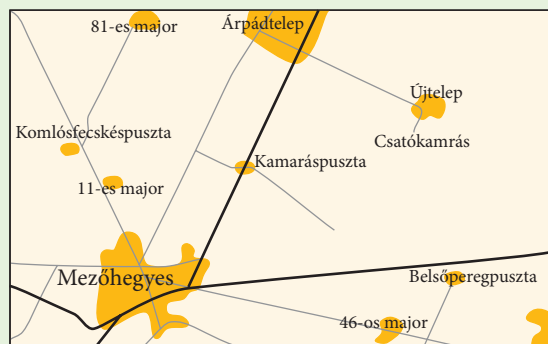
## FELADAT

1. Szerkeszd meg egy 4 cm oldalú szabályos háromszög beírt és körülírt körét!



- a) Számítsd ki e körök sugarának hosszát!  
b) Milyen kapcsolat van e körök sugarainak hossza között?

2. Van-e olyan hely Mezőhegyesen, amelyik egyenlő távolságra van Újtelep, illetve a 81-es és a 46-os major központjától? Válaszod indokold!



3. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 10 cm és 12 cm. Határozzuk meg, milyen hosszú a háromszög beírható körének sugara!
4. Egy háromszög körülírt körének sugara 4 cm, egyik oldalának hossza 7,5 cm, egy másik oldalának hossza 3,5 cm. Szerkeszd meg a háromszöget!

## HÁZI FELADAT

1. Szerkeszd meg egy hegyesszögű háromszög körülírt körét és beírt körét a füzetedben!

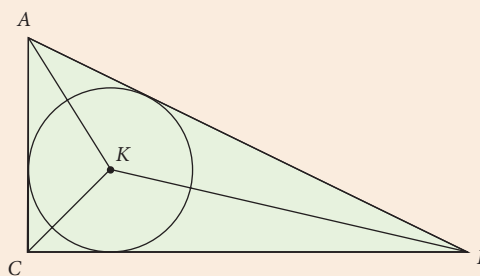
2. Szerkessz egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek a körülírt köre 2,5 cm sugarú! Szerkeszd meg ennek a háromszögnek a beírt körét!



A GeoGebra programmal ellenőrizheted a gondolatmeneted és a szerkesztéseid helyességét is.

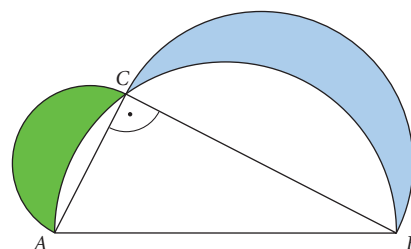
3. Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha körülírt körének sugara 3,5 cm, szára pedig 6 cm!

4. Egy derékszögű háromszög egyik szöge  $26^\circ$ -os. A beírható kör középpontját összekötjük a háromszög csúcaival. Így három háromszöget kapunk. Határozd meg a háromszögek szögeit!



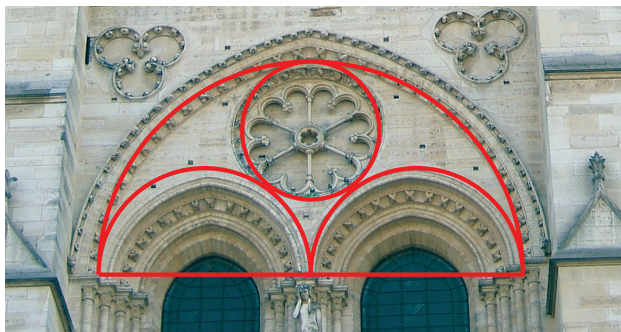
## EMELT SZINT

Az ábrán lévő, úgynevezett Hippokratész holdacskáit az  $ABC$  derékszögű háromszög oldalai fölé szerkesztett félkörök határolják. Mutasd meg, hogy a két színezett holdacska területének összege a háromszög területével egyenlő!

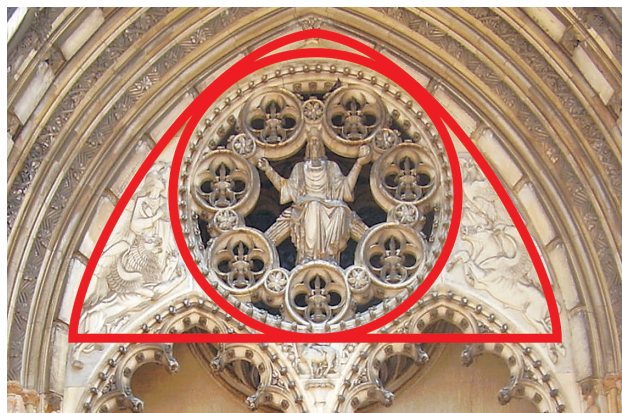
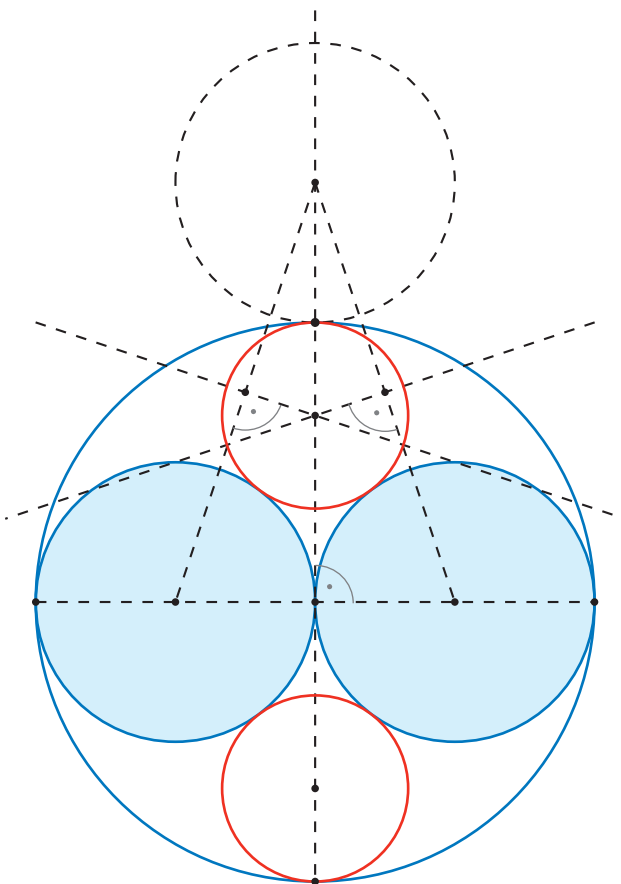


Városnézéseink során könnyen felfedezhetünk olyan díszítőmotívumokat, amelyek egymással érintkező körökből, körívekből épülnek fel.

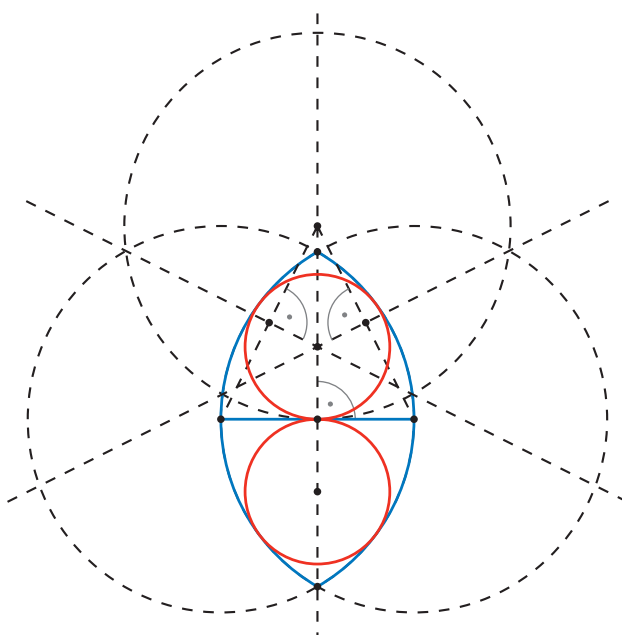
Ezek közül kettőnek a szerkesztése olyan egyszerű, hogy matematikai ismeretek nélkül is könnyen adhatták tovább a mesteremberek tanítványaiknak. Tanulmányozd az ábrákat, és „fejtsd meg” a mesteremberek „titkát”! Hajtsd végre a szerkesztéseket!



Szerkesztése



Szerkesztése

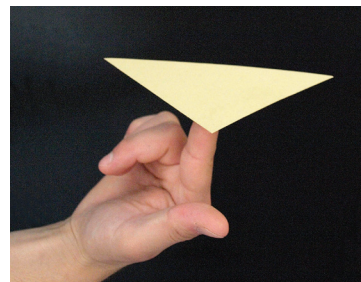
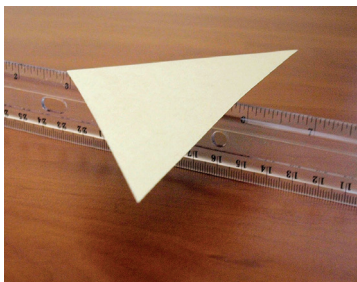


Ha a jó mesterember a „bűvös” Pitagorasz-tételt is ismerte, akkor könnyen kiszámíthatta, hogy a bal oldali ábra legkisebb körének sugara pontosan harmada a legnagyobb kör sugarának, a jobb oldali ábra kis köreinek sugara pedig pontosan háromnyolcada a nagy körök sugarának. Lásd be, hogy jól okoskodtak!



## BEVEZETŐ

Vágni ki kartonpapírból egy tetszőleges háromszöget! Próbáld meg kiegyensúlyozni a vonalzód élén (sőt: akár a kinyújtott tenyered élén!) úgy, hogy az alátámasztás átmenjen az egyik csúcson! Hogyan kell igazítani a háromszöget? Most próbáld meg kiegyensúlyozni a háromszöget az ujjad hegyén! Hol legyen az alátámasztás?



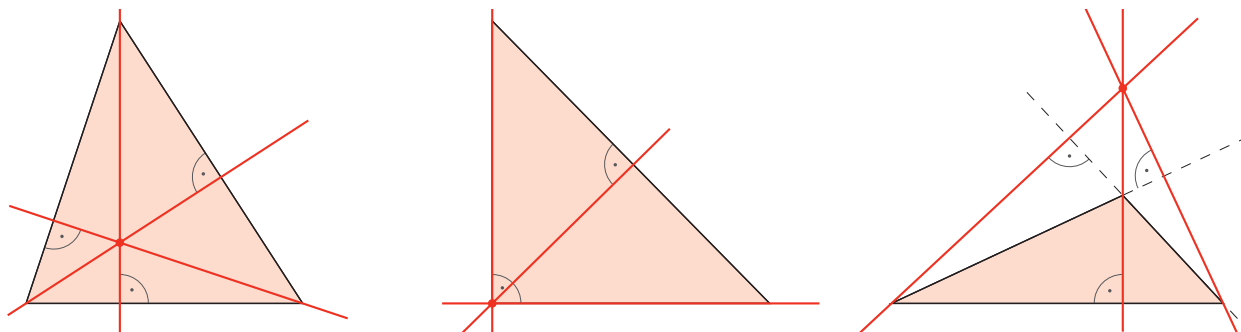
## ELMÉLET

**Definíció:** A háromszög csúcsán átmenő és a szemközti oldal egyenesére merőleges egyenest a háromszög **magasság-vonalának** nevezzük. **Magasságnak** nevezzük a magasságvonálnak a csúcs és az oldalegyenes közé eső szakaszát, illetve ennek a szakasznak a hosszát. (Másképp: a háromszög magassága a háromszög egy csúcsának és a csúccsal szemközti oldalegyenesnek a távolsága.)

**Tétel:** A háromszög három magasságvonala egy pontban metszi egymást.

Ezt a pontot a háromszög **magasságpontjának** nevezzük.

**Megjegyzés:**



A háromszög magasságpontja hegyesszögű háromszög esetében a háromszög belsejében, derékszögű háromszög esetében a derékszögű csúcsban, tompaszögű háromszög esetében a háromszögön kívüli sírkészben van.

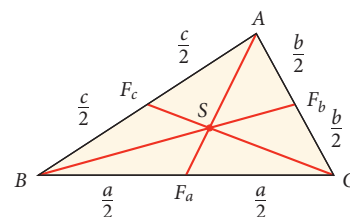
**Definíció:** A háromszög csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög **súlyvonalának** nevezzük.

**Tétel:** A háromszög három súlyvonala egy pontban metszi egymást.

**Definíció:** A súlyvonalak metszéspontja a **háromszög súlypontja**.

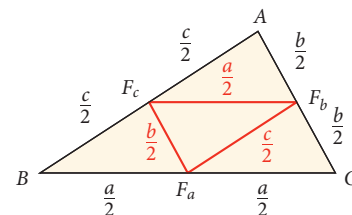
(A bevezető feladat alátámasztási pontja éppen ez a pont!)

**Tétel:** A súlypont harmadolja, vagyis 1 : 2 arányban osztja két részre a súlyvonalat úgy, hogy a háromszög csúcsától van távolabb, az oldalfelező ponthoz közelebb.



**Definíció:** A háromszög két oldalfelező pontját összekötő szakasz a háromszög **középvonala**.

**Tétel:** A háromszögben a középvonal párhuzamos a háromszög harmadik (általa össze nem kötött) oldalával, és fele olyan hosszú.



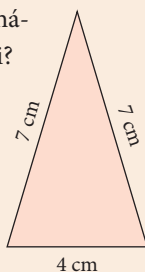
A GeoGebra programmal szemléltethető az állítások érvényessége minden háromszög esetére.

## FELADAT

- Van-e olyan háromszög,
  - amelynek egyik súlyvonala merőleges a felezett oldalra;
  - amelynek egyik súlyvonala egyben szögfelező is;
  - amelynek súlypontja egybeesik a körülírt kör középpontjával;
  - amelynek súlypontja illeszkedik a háromszög egyik középvonalára?
- Egy szabályos háromszög súlypontja az egyik csúctól 2,8 cm távolságra van.
  - Mekkora a háromszög magassága?
  - Mekkora a beírható és a köré írható kör sugara?
  - Mekkora a háromszög oldala?
- Egy derékszögű háromszög átfogója 65 cm, egyik befogója pedig 56 cm hosszú.
  - Számítsd ki a középvonalainak hosszát!
  - Milyen hosszúak a befogókhoz tartozó súlyvonalak?
- Egy háromszög két oldalának a hossza 25 mm, illetve 18 mm, az általuk bezárt szög  $\alpha$ . Mekkora a 25 mm-es oldalhoz tartozó magasság, ha
  - $\alpha = 30^\circ$ ;
  - $\alpha = 45^\circ$ ;
  - $\alpha = 90^\circ$ ;
  - $\alpha = 120^\circ$ ;
  - $\alpha = 135^\circ$ ?
- Egy egyenlő szárú háromszög alapja 42 cm, szára 29 cm hosszú. Számítsd ki a háromszög középvonalainak és súlyvonalainak hosszát!

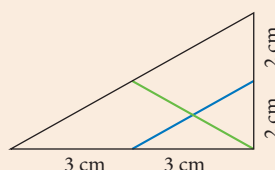
## HÁZI FELADAT

- Mekkora a 4,8 cm oldalú szabályos háromszög középvonalai és súlyvonalai?
- Egy háromszög oldalainak hossza 4 cm, 7 cm, 7 cm.
  - Szerkeszd meg a köré írt kör  $O$  középpontját, az  $M$  magasságpontot és az  $S$  súlypontot!
  - Milyen kapcsolatot sejtess az  $OS$  és az  $SM$  szakaszok hossza között? Válaszod méréssel indokold!
- Egy derékszögű háromszög átfogójának hossza 5 dm, egyik befogójának hossza 48 cm. Határozd



meg a távolságot a háromszög súlypontja és köré írható körének középpontja között, valamint a háromszög súlypontja és magasságpontja között!

- Az ábra szerinti derékszögű háromszögben a derékszögű csúcsot összeköttöttük az átfogó felezőpontjával, és összeköttöttük a két befogó felezőpontját is. Mekkora ez a két szakasz?



Bizonyítsuk be a háromszög magasságvonalaira és súlyvonalaira vonatkozó tételeket!

**Tétel:** A háromszög három magasságvonala egy pontban metszi egymást.

#### Bizonyítás

Felhasználjuk, hogy ha egy négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, akkor a négyszög paralelogramma, így a szemközti oldalai egyenlők.

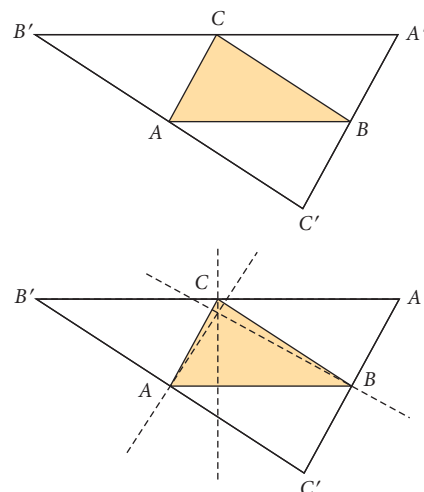
Húzzunk párhuzamost a szemközti oldallal az  $ABC$  háromszög minden csúcsán át! Jelöljük a kapott háromszöget az ábra szerint  $A'B'C'$ -vel.

Az így keletkezett  $C'BCA$  négyszög paralelogramma, hisz szemközti oldalai párhuzamosak. Ezért  $AC' = BC$ .

Hasonlóan, az  $ABCB'$  négyszög paralelogramma, hisz szemközti oldalai párhuzamosak. Ezért  $AB' = BC$ .

Azt kaptuk, hogy az  $A$  pont felezőpontja a  $C'B'$  oldalnak, ezért az  $ABC$  háromszögben az  $A$ -ból húzott magasságvonal egyben oldalfelező merőleges az  $A'B'C'$  háromszögben.

Hasonlóképpen belátható, hogy az  $ABC$  háromszög másik két magasságvonala is egyben az  $A'B'C'$  háromszög egy-egy oldalfelező merőlegese. A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, ezért a három magasságvonal is egy pontban metszi egymást.



**Tétel:** A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

#### Bizonyítás

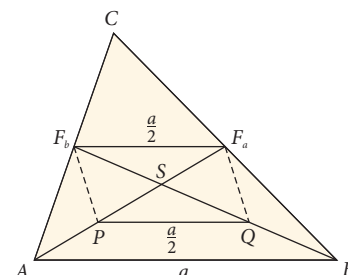
Legyenek  $F_a$  és  $F_b$  az  $ABC$  háromszög oldalfelező pontjai. Az  $AF_a$  és  $BF_b$  súlyvonalak metszéspontja  $S$ , az  $AS$  és  $BS$  szakaszok felezőpontjai pedig  $P$  és  $Q$ .

Az  $F_aF_b$  szakasz az  $ABC$  háromszögben középvonal, ezért párhuzamos az  $a$  oldallal, és feleakkora hosszúságú.

A  $PQ$  szakasz az  $ABS$  háromszögben középvonal, ezért párhuzamos az  $a$  oldallal, és feleakkora hosszúságú.

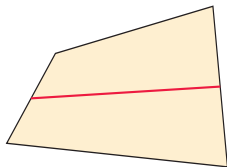
A  $PQF_aF_b$  négyszög paralelogramma, hiszen van két párhuzamos és egyenlő hosszú oldala. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért  $F_aS = SP$ . Ugyanakkor  $P$  felezőpont az  $SA$  oldalon, ezért  $SP = PA$ . Ezzel beláttuk, hogy az  $S$  pont – és ezzel az  $s_b$  súlyvonal is – az  $s_a$  súlyvonalat  $2:1$  arányban osztja.

Ugyanígy belátható, hogy  $s_c$  is  $2:1$  arányban osztja az  $s_a$  súlyvonalat, ezért az is áthalad az  $S$  osztóponton. A három súlyvonal tehát egy pontban metszi egymást.

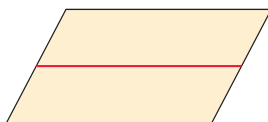


## 1. Négyszögek középvonalai

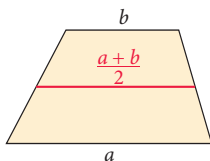
Egy négyszög két szemközti oldalának felezőpontját összekötő szakasz a négyszög középvonala.



A paralelogramma középvonala párhuzamos és egyenlő hosszú a megfelelő oldalakal.

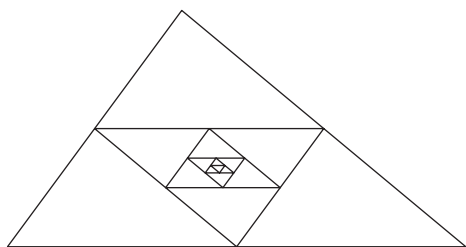


A trapéz szárainak felezőpontját összekötő középvonal hossza az alapok összegének fele.



## 2. Az ábra érdekes kapcsolatot szemléltet.

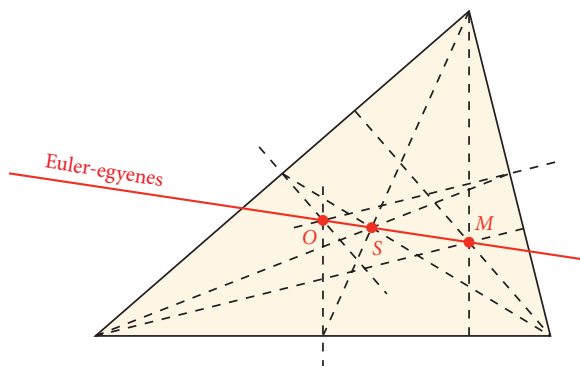
Egy háromszögbe berajzoltuk a középvonalait, aztán az így kapott háromszögbe ismét, és ezt többször megismételtük.



*Feladat:* Milyen pontot zárnak közre az egyre kisebb és kisebb háromszögek? Miért?

## 3. Minden háromszögre igaz:

A körülírt kör  $O$  középpontja, az  $M$  magasságpont és az  $S$  súlypont egy egyenesre esik.



Ezt az egyenest a háromszög **Euler-egyenesének** nevezzük. A súlypont a másik két pont között van, kétszer akkora távolságra  $M$ -től, mint  $O$ -tól.

(*L. Euler* 1707-től 1783-ig élt, svájci születésű tudós volt.)

Nevét így ejtjük: ajler.)

*Megjegyzés:* Szabályos háromszög esetében a három nevezetes pont egybeesik, ezért a tétel állítása ebben az esetben is igaz, ámde „semmitmondó”.

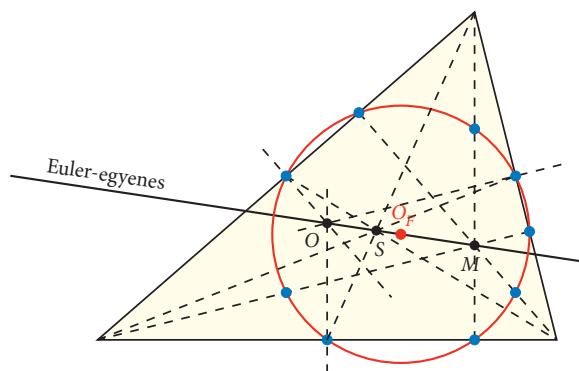
## 4. Minden háromszögre igaz:

A három oldalfelező pont meghatároz egy kört. Ezen rajta van

- a magasságvonalak és az oldalegyenesek három metszéspontja;
- a magasságpont és a csúcsok közötti szakaszok felezőpontja.

Ezt a kört a háromszög **Feuerbach-körének**, másképp a kilenc pont körének nevezzük. A Feuerbach-kör középpontja az Euler-egyenesen van, középen, a körülírt kör középpontja és a magasságpont között. A kör sugara feleakkora, mint a háromszög köré írt kör sugara.

(*K. W. Feuerbach* 1800-tól 1834-ig élt, német gimnáziumi tanár volt. Nevét így ejtjük: fajerbah.)



A 3. és 4. feladat állításának általános érvényességét a *GeoGebra* programban is szemléltetni lehet.

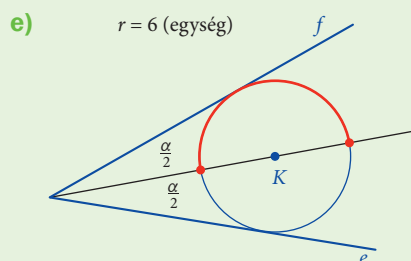
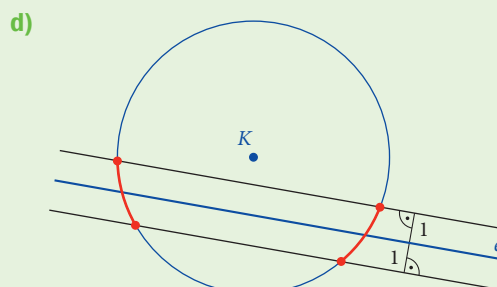
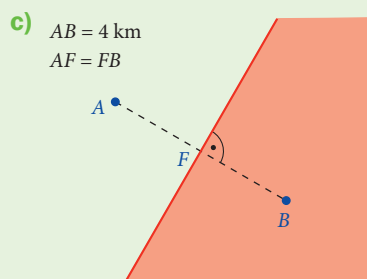
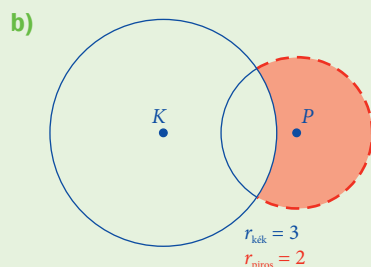
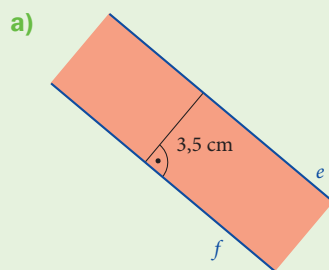


## FELADAT

1. ☞ Döntsd el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! Válaszod indokold!

- Van  $89^\circ$ -osnál nagyobb hegyesszög.
- Ha két hegyesszög egymásnak pótszöge, akkor nagyságuk különböző.
- Létezik olyan háromszög, mely oldalainak hossza 30 cm; 7 dm; 0,9 m.
- A háromszög belső szögfelezője mindig felezi a szemközti oldalt.
- Ha két szög egymásnak csúcsszöge, akkor összegük lehet homorú szög.
- A  $2a$  oldalhosszúságú szabályos háromszög magasságának hossza  $a\sqrt{3}$ .
- A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja a háromszögbe írt kör középpontja.
- A háromszögnek van olyan nevezetes vonala, mely nem halad át a háromszög egyik csúcán sem.

2. ☞ Jellemezd pontoktól és egyenesektől mért távolságokkal az ábrán piros színnel jelölt síkbeli pontokat!



3. ☞ Egy sífelvonó a tengerszint fölött 1100 méterről indul és a tengerszint fölött 1700 méterre érkezik. A felvonóval 1500 méter hosszan tart az út. Mekkora a vízszintesen történő elmozdulás, miközben a felvonó egyenesen eljut az indulási pontból az érkezési pontba?

4. ☞ Egy 25 cm sugarú kör két, egymással párhuzamos húrjának hossza 30 cm és 48 cm. Mekkora lehet a két húr távolsága?

5. ☞ Adott egy egység hosszúságú szakasz. Szerkessz  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$  hosszúságú szakaszokat! Írd le a szerkesztés menetét és azokat az ismereteket, melyekre a megoldást alapoztad!



**1** Adott a sík egy  $K$  pontja és egy  $f$  egyenese, melyeknek egymástól való távolsága 4 cm. Szerkeszd meg a síkban azon pontok halmazát, melyekre teljesül, hogy

- a) a  $K$  ponttól való távolságuk kisebb, mint 4 cm;
- b) az  $f$  egyenestől mért távolságuk legalább 2 cm;
- c) kisebb távolságra vannak az  $f$  egyenestől, mint a  $K$  ponttól;
- d) a  $K$  ponttól való távolságuk legalább 3 cm, az  $f$  egyenestől mért távolságuk legfeljebb 3 cm!

**2** Egy (talajra merőleges) cölöp rögzítéséhez sodronyokat használnak úgy, hogy azok egyik végét a cölöp felső végéhez, másik végét a talajhoz rögzítik. A cölöp magassága 3 méter. Az egyik kifesztett sodronyt a cölöp talpától 7 méterre tudják rögzíteni a talajon, a másik sodronyt a cölöp másik oldalán, a cölöp talpától 4 méterre. Határozd meg egy tizedesjegy pontossággal, hogy milyen hosszú sodronykötélre van szükség összesen ehhez a két rögzítéshez!

**3** Keresd meg az alábbi Magyarország-térképen a Békéscsaba, Debrecen, Tatabánya városok helyét jelölő pontokat!

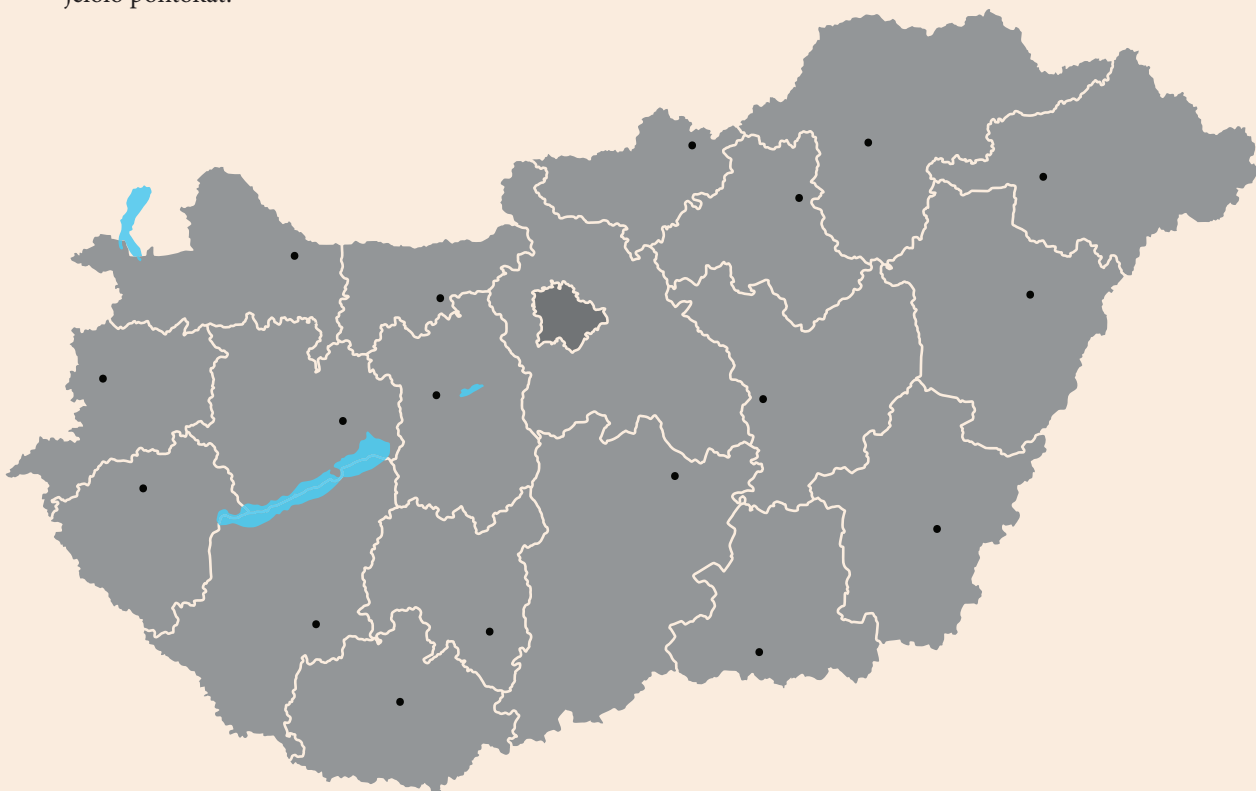
Mérd le a pontok távolságát (légvonal), majd számolás segítségével határozd meg, hogy a három város által alkotott háromszög

- a) (közel) derékszögű-e;
- b) mely csúcánál van a legkisebb szög.

Projektfeladat:

Nézz utána, hogy a valóságban mekkora a Békéscsaba–Debrecen távolság légvonalban, és ez alapján állapítsd meg a térképen használt hozzávetőleges méretarányt!

**4** Egy geodéziai mérésekhez használatos mérőberendezés (teodolit) állványának három lábát a vízszintes talajon egy szabályos háromszög három csúcspontjában helyezik el a stabilitás érdekében. A lábak talpainak távolsága egymástól 150 cm, a lábak hossza 190 cm. A talpak által létrehozott háromszög súlypontja fölött milyen távolságban van a talajtól a műszer rögzítési pontja az állványon?



## ELMÉLET

## Thalész tétele

Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal egy harmadik pontjával, derékszögű háromszöget kapunk. A harmadik pont lesz a derékszögű csúcs.

Másképp:

Ha a  $C$  pont rajta van az  $AB$  átmérőjű körön, de nem esik egybe sem  $A$ -val, sem  $B$ -vel, akkor a  $C$ -ből az  $AB$  szakasz „derékszögben látszik”.

## Bizonyítás

Tudjuk, hogy az  $ABC$  háromszög  $AB$  oldala a háromszög köré írt kör átmérője. Ha a  $C$ -t összekötjük a kör  $K$  középpontjával, akkor az  $ABC$  háromszöget az  $ACK$  háromszögre és a  $BCK$  háromszögre bontottuk, amelyek mindketten egyenlő szárú háromszögek (a száruk a kör sugarával egyenlők).

Jelöljük az  $A$ -nál lévő szöget  $\alpha$ -val, a  $B$ -nél lévő szöget  $\beta$ -val! Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, ezért

$$\angle ACK = \alpha \text{ és } \angle BCK = \beta.$$

Tudjuk, hogy a háromszög szögeinek összege  $180^\circ$ .

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ; \quad 2\alpha + 2\beta = 180^\circ; \quad \alpha + \beta = 90^\circ.$$

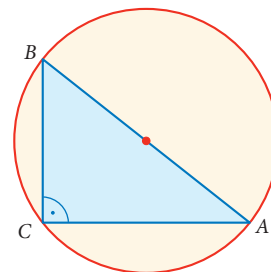
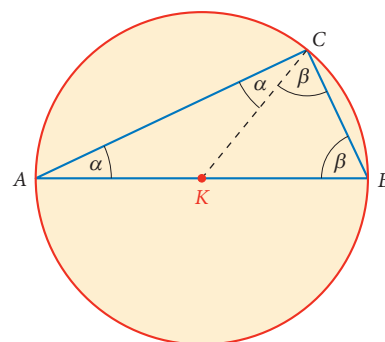
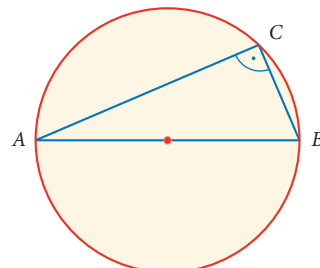
Ez azt jelenti, hogy az  $ABC$  háromszögnek a  $C$  csúcsnál derékszöge van.

## Thalész tételének megfordítása

A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontjában van.

Másképp:

Ha a  $C$  pontból az  $AB$  szakasz „derékszögben látszik”, akkor  $C$  rajta van az  $AB$  átmérőjű körön.

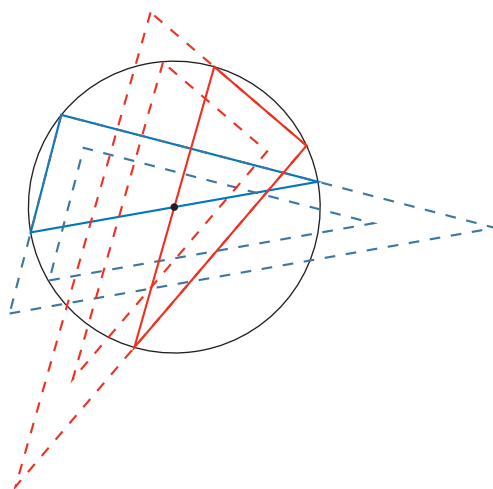


## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogyan állapítható meg egy kör középpontja, ha csak egy derékszögű vonalzónk van?

## Megoldás

Illesszük a derékszögű csúcsot a kör egy tetszőleges pontjához, húzzuk meg a két – egymásra merőleges – húrt, és kössük össze a másik végpontjaikat! Thalész tételének megfordítása értelmében az így kapott derékszögű háromszög átfogója éppen a kör egyik átmérője lesz. Ismételjük meg az előző eljárást egy másik ponttal! A kör középpontja a két átmérő metszéspontja lesz.



Milyen kapcsolatban van egymással egy *tétel* és a *tétel megfordítása*?

Minden tétel két részből áll: a *feltételből* és az *állításból*. Ha a feltételt és az állítást felcseréljük, megkapjuk a tétel **megfordítását**.

Némelyik tételnek a megfordítása is igaz, más tételeké viszont nem feltétlenül.

*Például*

a Thalész-tételnél:

| Feltétel                                         | Állítás                                          | Következik-e a feltételből az állítás? |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------|
| a háromszög egyik oldala a köré írt kör átmérője | a háromszög derékszögű                           | igen                                   |
| a háromszög derékszögű                           | a háromszög egyik oldala a köré írt kör átmérője | igen                                   |

Vizsgáljunk meg egy másik tételt ehhez hasonlóan: Ha egy négyszög négyzet, akkor a szögei derékszögek.

| Feltétel                      | Állítás                       | Következik-e a feltételből az állítás? |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------|
| a négyszög négyzet            | a négyszög szögei derékszögek | igen                                   |
| a négyszög szögei derékszögek | a négyszög négyzet            | nem                                    |

Ennek a tételnek a megfordítása (Ha egy négyszög szögei derékszögek, akkor a négyszög négyzet.) nem igaz, mert van olyan négyszög, amely nem négyzet, de a szögei derékszögek. Ilyen minden téglalap, amelynek nem egyenlő hosszúak az oldalai.

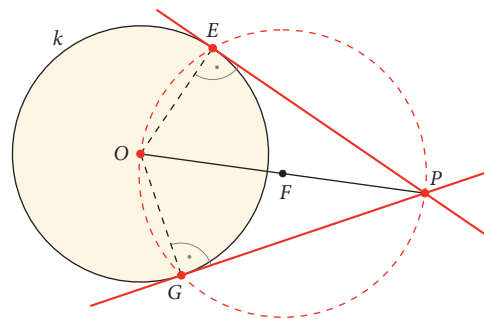
## KIDOLGOZOTT FELADAT

### 2. Szerkesszünk a $k$ körhöz érintőket a külső $P$ pontból!

*Megoldás*

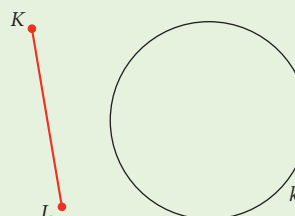
Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Ezért olyan pontot keresünk a  $k$  körön, melyből az  $OP$  szakasz derékszögben látszik. Szerkesztük meg először az  $OP$  átmérőjű kört! A két kör az  $E$  és  $G$  pontokban metszi egymást. Thalész tétele miatt a  $PEO$  háromszög derékszögű az  $E$  pontnál. Ezért a  $PE$  egyenes érinti a  $k$  kört.

Hasonlóan látható, hogy a  $PG$  egyenes is érinti a  $k$  kört.



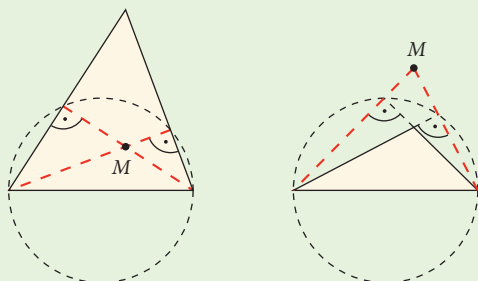
## FELADAT

1. Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek az átfogója a  $KL$  szakasz, és a harmadik csúcsa a  $k$  körön van! Másold le az alábbi ábrát és a füzetben dolgozz! Hány megoldást kapsz?



**2** Helyezd el úgy a  $KL$  szakaszt, hogy az előző feladatnak csak egy megoldása legyen!

**3** A háromszög egyik oldala mint átmérő fölé kört szerkesztettünk. Magyarázd meg, hogy a megszerkesztett  $M$  pont miért a háromszög magasságpontja!



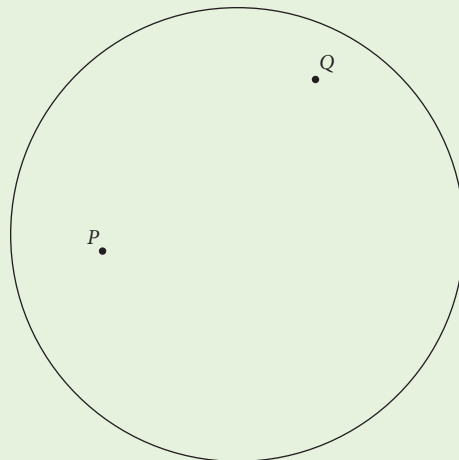
A GeoGebra program segítségével is vizsgál meg a fenti feladatot!

**4** Rajzolj egy 2,5 cm sugarú kört!

a) Szerkessz egy olyan pontot a körön kívül, amelyből 1 cm hosszú érintőszakasz húzható a körhöz!

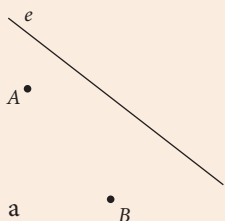
b) Szerkessz meg az összes olyan pontot, amelyből a körhöz 1 cm hosszú érintőszakasz húzható!

**5** Adott egy kör és belsejében két pont:  $P$  és  $Q$ . Szerkessz a körbe derékszögű háromszöget (ez azt jelenti, hogy a csúcsai illeszkedjenek a körvonalra), amelynek egyik befogója áthalad a  $P$  ponton, másik befogója pedig a  $Q$  ponton! Másold le az ábrát és a füzetedben dolgozz!

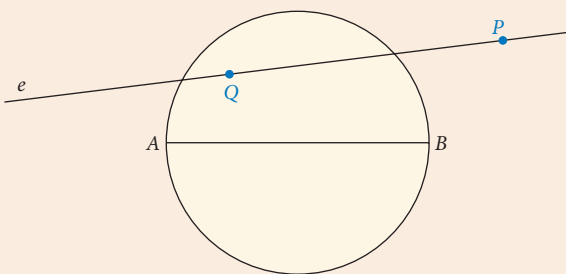


## HÁZI FELADAT

**1** Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek két csúcsa az  $A$  és a  $B$  pont, a harmadik csúcsa pedig az  $e$  egyenesen van! Másold le az alábbi ábrát és a füzetedben dolgozz! Hány megoldása van a feladatnak?



**2** Kösd össze gondolatban az  $e$  egyenes mindegyik pontját  $A$ -val és  $B$ -vel! Vedd fel az ábrát a füzetedben! Válaszolj az alábbi kérdésekre indoklással!



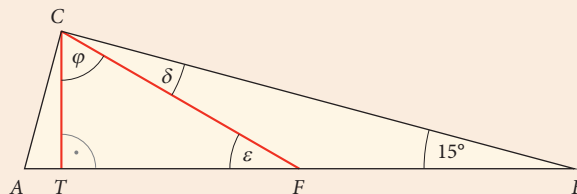
a) Melyik pontokból „látszik” az  $AB$  szakasz derékszögben?

b) Milyen szögben „látszik” az  $AB$  szakasz a körön kívüli pontokból, például a  $P$ -ből?

c) Milyen szögben „látszik” az  $AB$  szakasz a körön belüli pontokból, például a  $Q$ -ből?

**3** Egy derékszögű háromszög átfogója 7,6 cm, átfogóhoz tartozó magassága 3 cm. Szerkessz meg a háromszöget!

**4** Az  $ABC$  derékszögű háromszög egyik szöge  $15^\circ$ -os, az  $AB$  átfogó 12 cm hosszú.



a) Mekkora a  $CF$  súlyvonal?

b) Mekkora a  $\delta$  szög?

c) Mekkora az  $\epsilon$  és a  $\varphi$  szög?

d) Mekkora a  $CT$  magasság?

**Thalész** (Kr. e. 624?–548?) matematikus és filozófus, a hét görög bölcs egyike volt. Sokan a görög filozófia atyjaként emlegetik.

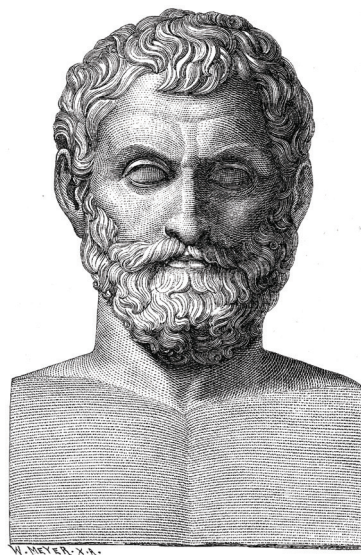
A kis-ázsiai Milétoszban született, föníciai nemesi családban. A tudományok mellett politikával és kereskedelemmel is foglalkozott.

Thalész érdekesen magyarázott egyes természeti jelenségeket; a földrengéseket például úgy, hogy a Föld vízen úszik, és a földrengéseket a víz hullámozása okozza.

Ő volt az első olyan matematikával is foglalkozó tudós, akinek a neve is fennmaradt. Komoly geometriai ismeretekkel rendelkezett, használta a térben elhelyezkedő egyenesek, síkok, testek fogalmát, távolságokkal és szögekkel dolgozott. Megmutatta, hogy a csúcsszögek egyenlők, hogy az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei megegyeznek, és hogy ha két háromszög egy-egy oldala és az azokon fekvő szögek páronként egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó. Bebizonyította, hogy a háromszög belső szögeinek összege akkora, mint két derékszög együtt.

Foglalkozott a hasonló háromszögekkel is, és kutatásai eredményét gyakorlati célokra is felhasználta. Például a hasonló háromszögek segítségével határozta meg a piramisok magasságát, sőt ilyen módszerrel megmérte hajók távolságát a tengeren.

Leghíresebb megállapítása a derékszögű háromszög és a köré írt kör kapcsolatát kimondó tétel, amely máig az ő nevét viseli. Magát az összefüggést az egyiptomi és babiloni papok valószínűleg már Thalész előtt is ismerték, erről azonban nem maradt fenn bizonyíték. A tétel első bizonyítását neki tulajdonítják.



## EMELT SZINT

Bizonyítsuk be Thalész tételének a megfordítását!

### Bizonyítás

Most azt tudjuk, hogy az  $ABC$  háromszög derékszögű, és  $C$  a derékszögű csúcs.

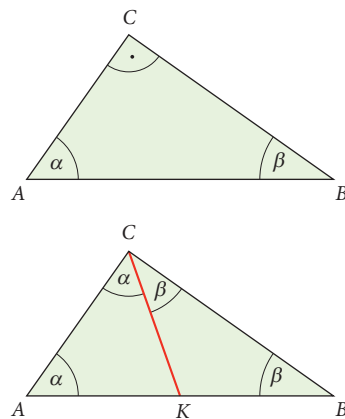
A két hegyesszög összege:  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Osszuk két részre a  $C$  csúcsnál fekvő derékszöveget az ábra szerint!

Az  $AKC$  háromszög két szöge egyenlő, ezért ez egy egyenlő szárú háromszög, amelyben  $KA = KC$ .

A  $BKC$  háromszög két szöge egyenlő, ezért ez egy egyenlő szárú háromszög, amelyben  $KC = KB$ .

Tehát  $KA = KC = KB$ , vagyis a  $K$  pont az átfogó felezőpontja, és ez egyenlő távolságra van a háromszög mindhárom csúcsától.  $K$  tehát a derékszögű háromszög körülírt körének középpontja.



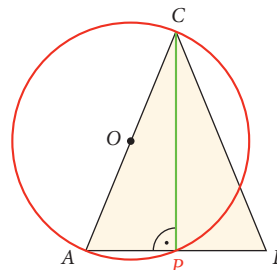


## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Rajzoljuk meg azt a kört, amelynek átmérője az  $ABC$  egyenlő szárú háromszög  $AC$  szára! Igazoljuk, hogy ez a kör a háromszög  $AB$  alapját annak a felezőpontjában metszi!

Megoldás

Az ábrán  $P$  a kör és az  $AB$  alap metszéspontja. Thalész tételéből következik, hogy az  $APC$  szög derékszög. A  $C$ -ből  $AB$ -re húzott merőleges viszont nem más, mint az  $ABC$  háromszög szimmetriatengelye, tehát  $P$  az alap felezőpontja.



2. Az  $ABC$  szabályos háromszög oldalai 44 mm-esek, az  $AB$  oldal felezőpontja  $D$ . Mekkora részekre osztja az  $AC$  oldalt a  $CD$  átmérőjű kör?

Megoldás

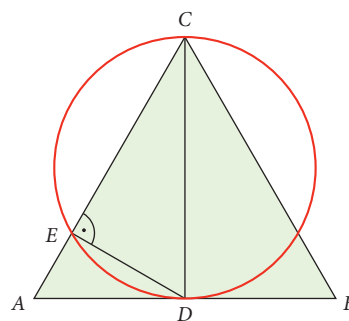
Jelöljük a kör és az  $AC$  oldal metszéspontját  $E$ -vel! Thalész tételéből következik, hogy a  $CED$  szög (és így az  $AED$  szög is) derékszög. Az  $AED$  derékszögű háromszög  $A$  csúcsánál lévő szöge  $60^\circ$ -os, ezért az  $AE$  befogó az  $AD$  átfogó fele.

Az  $AD$  szakasz pedig az  $AB$  oldal fele, vagyis 22 mm hosszúságú. Tehát

$$AE = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11 \text{ mm},$$

az  $AC$  oldal másik része pedig  $AC - AE = 44 - 11 = 33 \text{ mm}$ .

Érdekes: az  $AC$  oldal egyik része (az  $EC$  szakasz) 3-szor akkora, mint a másik (az  $AE$  szakasz).

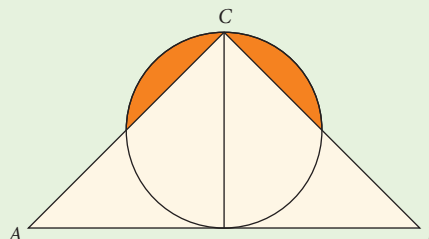


## FELADAT

1. Egy kör sugara 3,4 cm, s a középpontjától 4,5 cm távol van egy  $P$  pont. Milyen hosszúak a  $P$  pontból a körhöz húzható érintőszakaszok?

2. a) Vegyél fel két szakaszt! Szerkessz derékszögű háromszöget, ha az egyik szakasz az átfogónak a hosszát és a másik szakasz az átfogóhoz tartozó magasságnak a hosszát adja meg! Hány szerkesztési lehetőség van?
- b) Szerkessz háromszöget, ha egyik oldalának hossza 6 cm, valamint egy másik oldalhoz tartozó magassága 4 cm és súlyvonala 5 cm hosszúságú!

3. Az  $ABC$  háromszög egyenlő szárú, derékszögű. Az  $AB$  szakasz 100 cm hosszú. A kör átmegy a  $C$ -n, és a felezőpontjában érinti az  $AB$  átfogót.



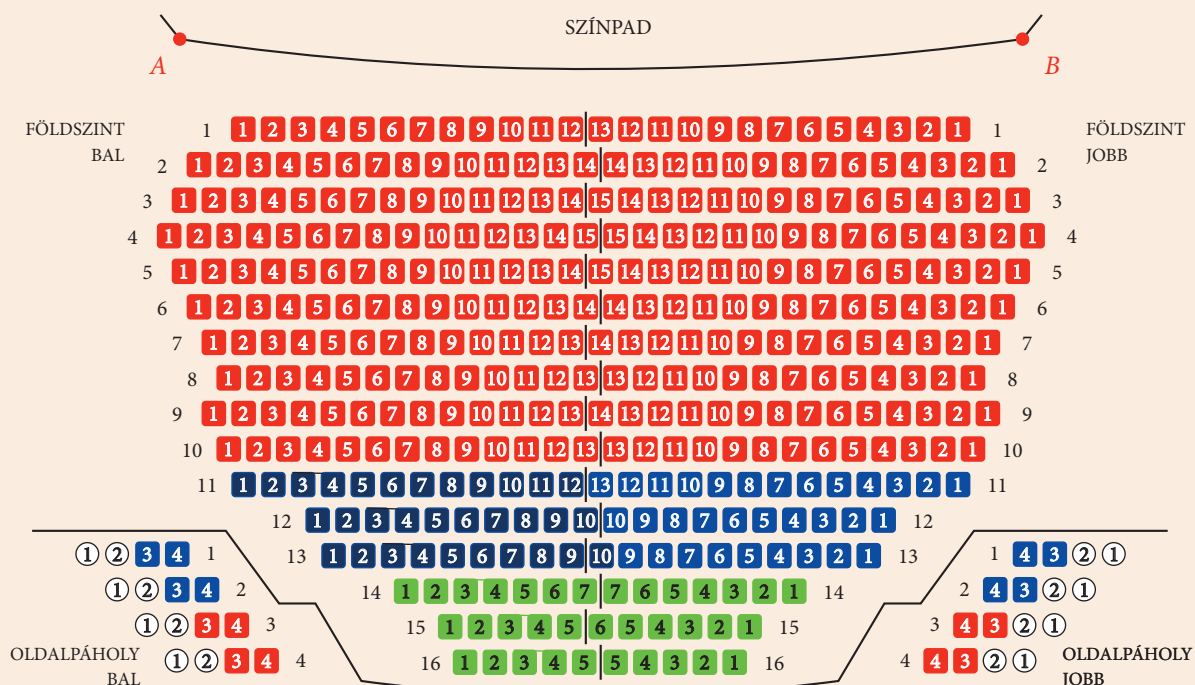
- a) Mutassuk meg, hogy a kör a befogókat a felezőpontjukban metszi!
- b) Határozzuk meg a kör és a befogók metszéspontjainak távolságát a háromszög csúcsaitól!

4. Egy háromszög oldalainak hossza 6; 8 és 9 egység.
- Igazold, hogy a háromszög hegyesszögű!
  - Határozd meg, hogy milyen távolságban van a 9 egység hosszúságú oldal felezőpontja a másik két oldalhoz tartozó magasságok talppontjaitól!

5. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszög  $AB$  oldalának felezőpontját jelölje  $P$ , az  $A$  csúcsból induló magasság talppontját  $Q$ , valamint a  $B$  csúcsból induló magasság talppontját  $R$ .
- Bizonyítsuk be, hogy a  $PQR$  háromszög egyenlő szárú!
  - Igaz-e az állítás derékszögű, illetve tompaszögű háromszög esetén is?

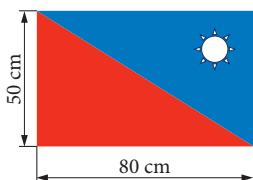
## HÁZI FELADAT

1. Egy téglalap oldalai 3,9 cm és 8 cm hosszúak. Mekkora a köré írható kör sugara?
2. Vegyél fel három szakaszt, legyenek ezek  $a$ ;  $m_b$ ;  $m_c$ . Szerkessz háromszöget, amelyben az adott szakaszok hossza éppen az egyik oldalnak ( $a$ ), illetve a másik két oldalhoz tartozó magasságnak ( $m_b$ ,  $m_c$ ) a hossza.
3. Másold át másolópapírra (sütőpapírra, zsírpapírra, pauszpapírra) az ábrán lévő színpad széleit jelző  $A$  és  $B$  pontokat!
- Szerkesztéssel határozd meg a papíron azon pontok mértani helyét, melyekből az  $AB$  szakasz derékszög alatt látszik!
- Az ábrára megfelelően visszahelyezve a másolópapírt határozd meg néhány olyan ülőhely „koordinátáit” (sor; szék), melyekből a színpad (azaz az  $AB$  szakasz) közelítőleg derékszög alatt látszik!



## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Az ábrán látható lobogó kék és piros darabját összevarrás előtt szeretnénk beszegni.
- a) Milyen hosszú szegélyt vegyünk egy-egy háromszögre?
- b) Mennyi piros és mennyi kék anyagra lenne szükségünk, hogy az ábra szerinti lobogót elkészíthessük?

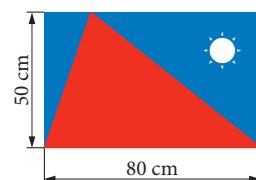


## Megoldás

- a) A piros és a kék háromszög megfelelő adatai megegyeznek, hiszen mindkettő derékszögű háromszög, azonos hosszúságú befogókkal. Ezért nyilván mindkettőre azonos hosszúságú szegély kell. A szegély hossza a háromszög oldalainak összege, azaz a háromszög kerülete. A befogók itt adottak, az átfogót pedig Pitagorasz tételével kiszámíthatjuk, ez kb. 94 cm. A háromszög kerülete közelítőleg:  
 $50 \text{ cm} + 80 \text{ cm} + 94 \text{ cm} = 224 \text{ cm}$ , ennyi tehát az egyes darabokhoz szükséges szegély hossza.

- b) Mivel a két háromszög megfelelő adatai megegyeznek, nyilvánvaló, hogy ugyanannyi kék és piros anyag kell, mégpedig mindkettőből éppen a lobogó teljes területének fele:  $T = \frac{50 \cdot 80}{2} = 2000 \text{ cm}^2$ .

2. Mennyi piros színű anyag kellene az ábrán látható lobogó elkészítéséhez?



## Megoldás

Vágjuk szét a lobogót – a rajz szerint – két részre:

Mindkét piros darab a megfelelő lobogórész területének fele, ezért az egyesítésük is a lobogó teljes területének fele lesz. Továbbra is

$$\text{igaz tehát, hogy } T = \frac{50 \cdot 80}{2} = 2000 \text{ cm}^2.$$

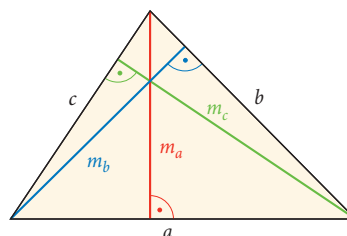
Ebben az esetben az eredeti téglalap egyik oldala a háromszög egyik *oldalával*, míg a téglalap másik oldala a háromszög egyik *magasságával* egyezik meg.

## ELMÉLET

## A háromszög területe:

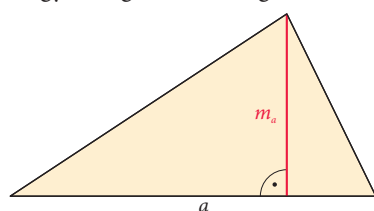
bármely oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának a fele.

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}.$$

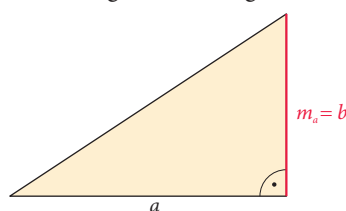


A háromszög területképletét hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögek esetén ugyanúgy alkalmazhatjuk:

Hegyeszögű háromszög esetén

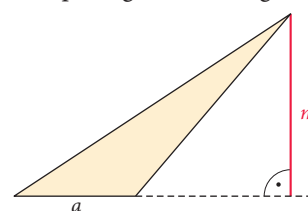


Derékszögű háromszög esetén



Az egyik befogóhoz tartozó magasság éppen a másik befogó.

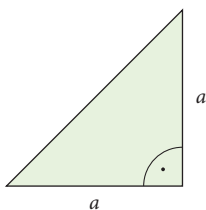
Tompaszögű háromszög esetén



Az *a* oldalhoz tartozó magasságvonal a háromszögon kívül található.

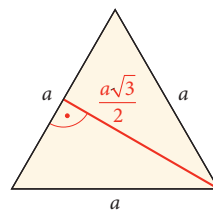
$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^2}{2}.$$

Az  $a$  befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területe:  $\frac{a^2}{2}$ .



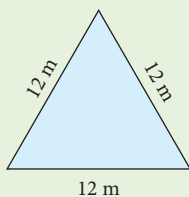
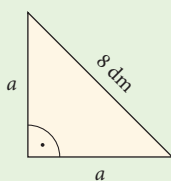
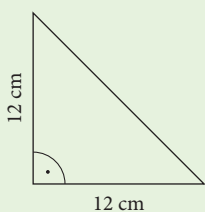
$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Az  $a$  oldalú szabályos háromszög területe:  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .



## FELADAT

1. Számítsd ki a háromszögek területét!

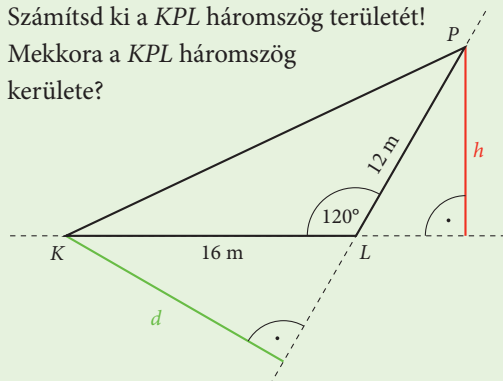


2. Egy derékszögű háromszög befogói 6 cm és 8 cm hosszúak.

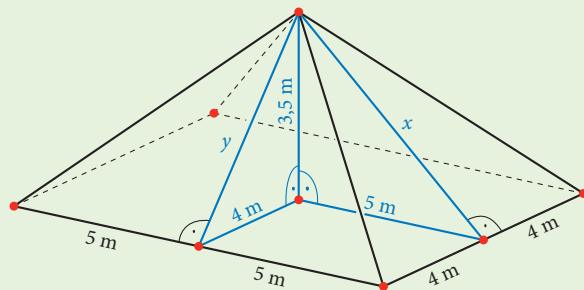
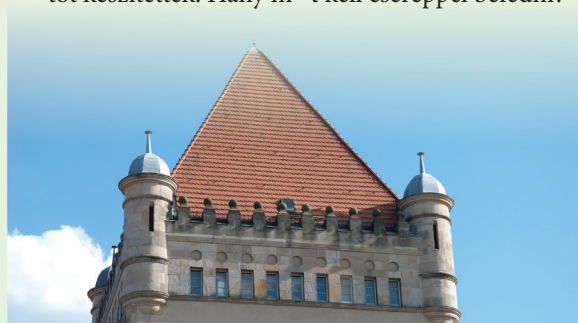
- Milyen hosszúak a befogókhoz tartozó magasságai?
- Mekkora a területe?
- Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó magassága?

3. Legyen az  $ABCD$  négyzet  $CD$  oldalának felezőpontja  $F$ , az  $AD$  oldalának  $D$ -hez közelebb eső harmadolópontja  $H$ . Számold ki, hogy a  $HBF$  háromszög területe hány százaléka az  $ABCD$  négyzet területének!

4. a) Mekkora távolságra van a  $K$  pont a  $PL$  szakasz egyenesétől, illetve a  $P$  pont a  $KL$  szakasz egyenesétől?  
 b) Számítsd ki a  $KPL$  háromszög területét!  
 c) Mekkora a  $KPL$  háromszög kerülete?

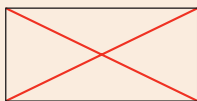


5. Egy  $10 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ -es téglalap alapra  $3,5 \text{ m}$  magas tetőt készítettek. Hány  $\text{m}^2$ -t kell cseréppel befedni?



## HÁZI FELADAT

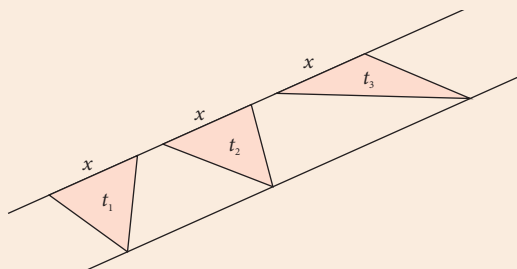
1. A tortát két vágással négyfelé vágtuk. Mind a négyen egy-egy részt kaptunk. Igazságos volt-e az osztzkodás?



2. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 8 cm, szárai 15 cm hosszúak.

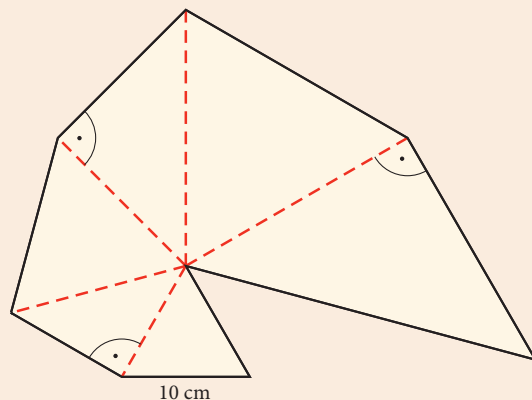
- Mekkora az alaphoz tartozó magassága?
- Mekkora a területe?
- Milyen hosszúak a szárakhoz tartozó magasságok?

3. A háromszögek csúcsai két párhuzamos egyenesen vannak, és a jelzett oldaluk egyenlő hosszú ( $x$ ). Melyik állítás igaz a területükre? Válaszod indokold!



- $t_1 = t_2 = t_3$
- $t_1 > t_2 > t_3$
- $t_1 < t_2 < t_3$
- $t_2 = t_1 > t_3$

4. A minta minden háromszöge szabályos háromszög vagy egyenlő szárú derékszögű háromszög.



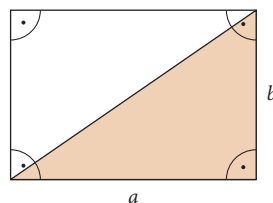
Számítsd ki a határoló nyolcszög kerületét és a területét!

## EMELT SZINT

Bizonyítsuk be a háromszög területképletét! Ehhez először egy speciális háromszög, a derékszögű háromszög területét írjuk fel, a téglalap területképletének ismeretében.

### 1. A derékszögű háromszög területe

Az  $a, b$  befogójú derékszögű háromszög területe  $\frac{ab}{2}$ , mert ez egy  $a, b$  oldalú téglalap fele.

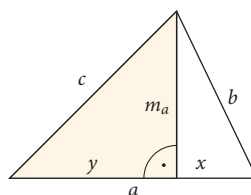


### 2. A hegyesszögű és a tompaszögű háromszög területe

- a) A magasság a háromszög belsejében van.

A háromszögünk két derékszögű háromszögre bomlik.

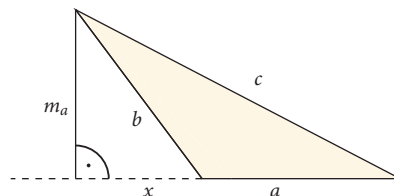
$$T = \frac{x \cdot m_a}{2} + \frac{y \cdot m_a}{2} = \frac{(x+y) \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$





- b) A magasság a háromszögön kívül halad.  
A háromszögünkhöz hozzátoldunk egy derékszögű háromszöget.

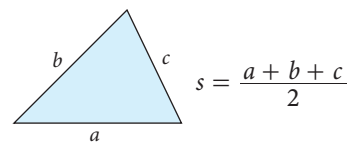
$$T = \frac{(a+x) \cdot m_a}{2} - \frac{x \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$



## Más képletek a háromszög területére

### 1. Héron képlete

Ha a háromszög területének felét  $s$ -sel jelöljük, bizonyítható, hogy területe így is kiszámítható:  $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .



Például:

Egy háromszög oldalhosszúságai mm-ben: 13, 20 és 21. Ekkor  $K = 54$ , tehát  $s = \frac{K}{2} = 27$ , a háromszög területe pedig:

$$T = \sqrt{27(27-13)(27-20)(27-21)} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2} = 2 \cdot 9 \cdot 7 = 126 \text{ mm}^2.$$

2. Ha a háromszög területének felét  $s$ -sel, a beleírt kör sugarát  $r$ -rel jelöljük, akkor a háromszög területe így is kiszámítható:  $T = r \cdot s$ .

Bizonyítás

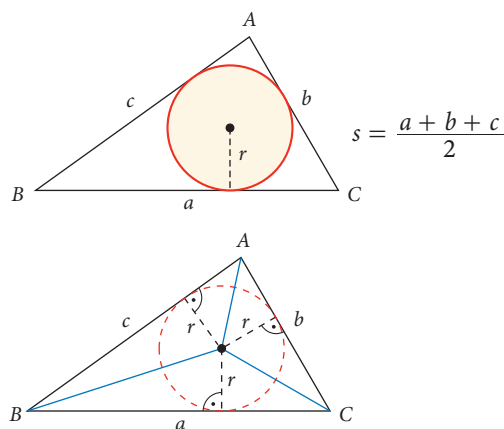
Kössük össze a piros kör középpontját a háromszög csúcaival! Így az  $ABC$  háromszöget 3 háromszögre bontottuk. E háromszögek egy-egy oldala  $a$ ,  $b$ , illetve  $c$ , a hozzájuk tartozó magasság  $r$ , és a területük összege megadja az eredeti háromszög területét:

$$T = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = r \cdot \left( \frac{a+b+c}{2} \right) = r \cdot s.$$

Például:

Az előző példánkban szereplő 13, 20, 21 oldalú háromszögbe írt kör suga-

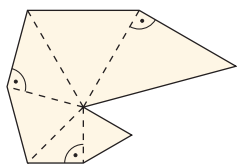
ra így könnyen kiszámítható:  $r = \frac{T}{s} = \frac{126}{27} = \frac{14}{3} \text{ mm}$ .



## FELADAT

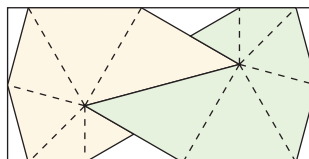
A minta minden háromszöge szabályos háromszög vagy egyenlő szárú derékszögű háromszög.

- a) Mutasd meg, hogy a határoló szakaszok között vannak párhuzamosak!



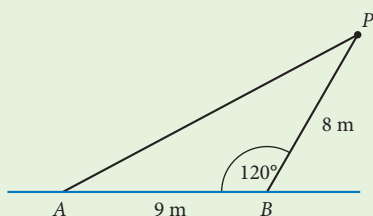
- b) Egy téglalpból vágjunk ki két, a 4. házi feladatban adott alakzattal egybevágó alakzatot az ábrán lerajzolt módon! A 4. házi feladatban jelölt oldal hossza legyen 10 cm.

- Mekkorák a téglalap oldalai?
- Legalább hány százalék hulladék keletkezik?
- Legalább hány százalék a hulladék, ha a jelölt oldal 20 cm?



## FELADAT

1. Milyen messze van az ábrán látható  $P$  pont az  $AB$  egyenestől és az  $A$  ponttól?

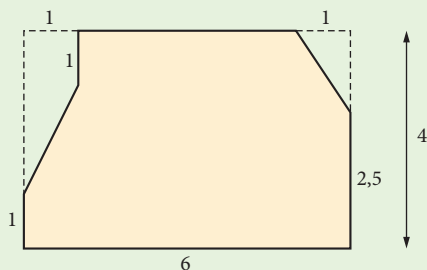


2. Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasságvonala és a derékszög szögfelezője  $20^\circ$ -os szöget zárnak be egymással.

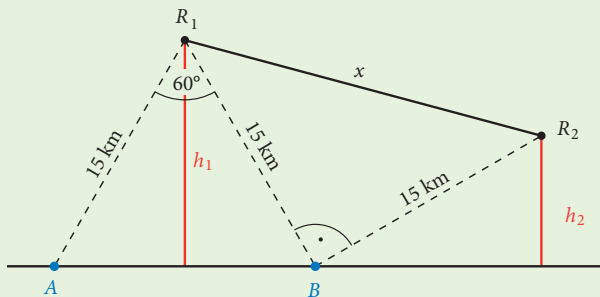
- Határozd meg a háromszög hegyesszögeinek nagyságát!
- Mekkora a háromszög köré írható kör sugara, ha az átfogó hossza 16 cm?

3. Mekkora lehetnek azok a szögek, melyek
- egymásnak pótszögei, és az egyik a másiknak 4,5-szerese;
  - egymás mellékszögei és különbségük  $42^\circ$ -os;
  - egyállású szögek és összegük  $170^\circ$ ;
  - váltószögek és az egyik  $12^\circ$ -kal kisebb, mint a másik?

4. Az ábrán egy téglalap alakú lemezből kivágott alakrész látható. A feltüntetett hosszúságok cm-ben értendők. Mekkora a lemez területe?



5. A repülőgép az  $A$  és a  $B$  irányjelzőtől is 15 km távolságban volt az  $R_1$  helyen, amikor gyorsan süllyedni kezdett. Amikor az  $R_2$  helyre ért, a  $B$  irányjelzőtől ismét 15 km távolságra volt. (Az ábra mutatja a repülő fedélzeti számítógépe által kiszámított szögeket is.)  
(Az  $A$ ,  $B$ ,  $R_1$  és  $R_2$  pontok ugyanabban a függőleges síkban vannak.)



- Mekkora magasságban ( $h_1$ ) volt a repülőgép az  $R_1$  helyen?
  - Mekkora távolságra ( $x$ ) van  $R_2$  az  $R_1$  helytől?
  - Hány km-t süllyedt a repülő, amíg  $R_2$ -be ért?
  - Mekkora szöget zár be a vízszintessel az  $R_1R_2$  egyenes?
6. Szerkessz olyan  $ABC$  háromszöget, amely oldalainak hossza:  $AB = 6$  cm,  $BC = 5$  cm,  $CA = 4$  cm! Jelöld színessel a háromszög oldalain lévő azon pontokat, melyekre teljesül, hogy közelebb vannak a  $C$  ponthoz, mint a  $B$ -hez, és ugyanakkor az  $A$  ponttól való távolságuk legalább 1 cm!
7. Egy  $K$  középpontú,  $r$  sugarú körhöz (a kör síkjában lévő)  $P$  pontból húzott  $PE$  érintőszakasz hossza 40 cm. Tudjuk még, hogy  $KP + r = 50$  cm. Határozzuk meg a  $KPE$  háromszög területét!

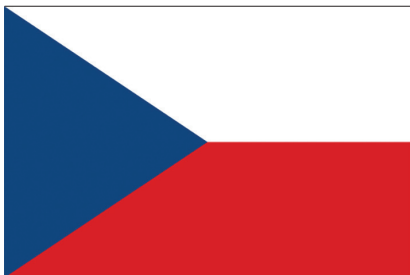
**8.** (Érettségi feladat, 2005)

Kör alakú amfiteátrum küzdőterének két átellenes pontjában, egy átmérő két végpontjában áll egy-egy gladiátor, az uralkodó a pálya szélén ül. A gladiáto-

rok egyenes vonalban odafutnak az uralkodóhoz. Az egyik 20 métert, a másik 1 méterrel többet tesz meg, amíg odaér. Mekkora az amfiteátrum sugara? Készíts ábrát is a megoldáshoz!

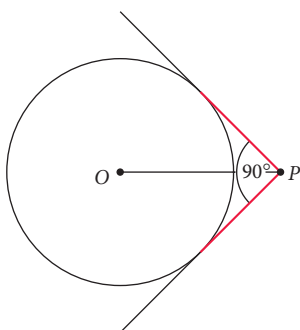
**TUDÁSPRÓBA**

- 1.** Csehország zászlaja egy szabályos háromszöget tartalmaz, amely éppen a zászló közepéig nyúlik be.



Mekkora a zászló egyes részeinek területei, ha a zászlót alkotó téglalap rövidebbik (függőleges) oldala éppen 1 m hosszú?

- 2.** Egy  $O$  középpontú kör sugara 5 egység. A körhöz egy külső  $P$  pontból érintőket húzunk, amelyek éppen  $90^\circ$ -os szöget zárnak be egymással.



- a)** Mekkora az  $OP$  távolság?  
**b)** Milyen hosszúak a  $P$ -ből a körhöz húzott érintő szakaszok?

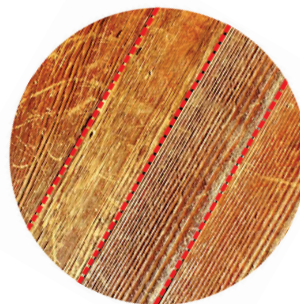
- 3.** Mekkora szöget zár be egymással a háromszög két-két magasságvonala, ha a háromszög szögei közül az egyik  $70^\circ$ -os és egy másik  $30^\circ$ -os nagyságú?

- 4.** Milyen magas a városháza tornya? Azt tudjuk, hogy amikor a Nap sugarai  $30^\circ$ -os szögben érik a talajt, akkor a torony árnyéka 42 méter.

- 5. a)** Szerkessz derékszögű háromszöget, ha átfogójának hossza 6 cm, és az átfogóhoz tartozó magasság 4 cm hosszú!

- b)** Szerkeszd meg az előbbi derékszögű háromszög beírható körét!

- 6.** A képen látható kerék átmérője 80 cm, és négy egyforma széles deszkalapból faragták, amelyeket azután egymás mellé illesztettek. Milyen hosszúak az egyes illesztések? (az ábrán pirossal jelölve)



# TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Hány fokok szöget zárnak be egymással az óramutatók

- a) 2:45-kor,
- b) 16:40-kor?

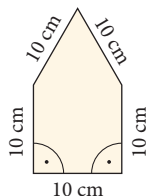
2. a) Egy egyenlő szárú háromszög szárszöge  $40^\circ$ -os. Mekkora a háromszög szögei?

- b) Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő egyik szög  $80^\circ$ -os. Mekkora a háromszög szögei?
- c) Egy egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögeinek szögfelezői  $150^\circ$ -os szöget zárnak be egymással. Mekkora a háromszög szögei?

3. Egy háromszög oldalhosszai centiméterben kifejezve egész számok. Két oldal hossza 3 cm és 7 cm. Hány ilyen háromszög van? Mekkora lehet a háromszögek kerülete?

4. Melyik téglalap átlója hosszabb: amelynek oldalai 3,4 cm és 4,5 cm hosszúak, vagy amelynek oldalai 2,8 cm és 4,9 cm hosszúak?

5. Áron azt a feladatot kapta, hogy egy 55 cm hosszú, 29 cm széles, téglalap alakú kartonlaphól vágjon ki 10 db egyforma „házikót” az ábra szerinti méretekkel.



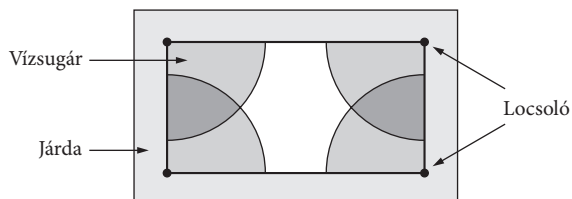
- a) Számítással mutasd meg, hogy Áron feladata megoldható!
- b) Számítsd ki, hány százalék hulladék keletkezett!

6. Az Andrassy út egyik végétől kiindulva 2000 m hosszan egy kötelet szeretnénk kifeszíteni. A kötél két végét rögzítjük is az egymástól pontosan 2 km távolságra lévő pontok között, de kiderül, hogy a kötél 2001 méter hosszú, ezért nem feszes. Milyen magasra tudnánk felemelni a kötelet, ha a közepénél felemelve kifeszítenénk? Átférne alatta a 4-6-os villamos?

7. Egy téglalap oldalai 7 cm és 9 cm hosszúak. Milyen messze van a téglalap egyik csúcsa a téglalap két átlójától?

8. (Kompetenciamérés, 2013)

Téglalap alakú kertekhez találták ki az olyan locsolót, amely egy negyedkör (derékszögű körcikk) alakú területet locsol meg, így a kert sarkába állítva csak a kertet öntözi, ahogy a következő ábra mutatja. Egy 3 méter széles és 4 méter hosszú (téglalap alakú) virágoskertben milyen legkisebb hatósugarú locsolókra van szükség ahhoz, hogy a kert egész területe meg legyen öntözve?



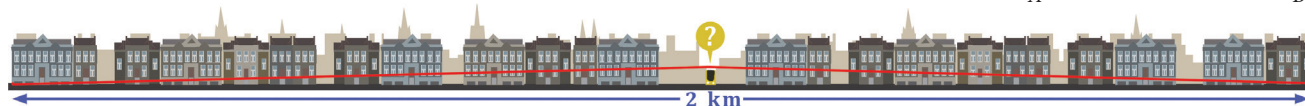
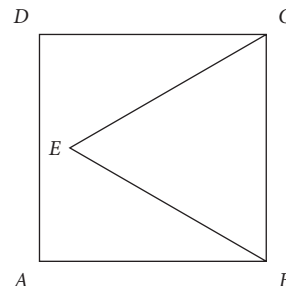
9. Egy háromszög belső szögeinek aránya  $10:11:15$ . Hány fokok a legkisebb külső szög?

10. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 6 cm, és két szöge  $30^\circ$ -os.

- a) Mekkora az alaphoz tartozó magassága?
- b) Mekkora a szárhoz tartozó magassága?

11. (Érettségi feladat, 2019)

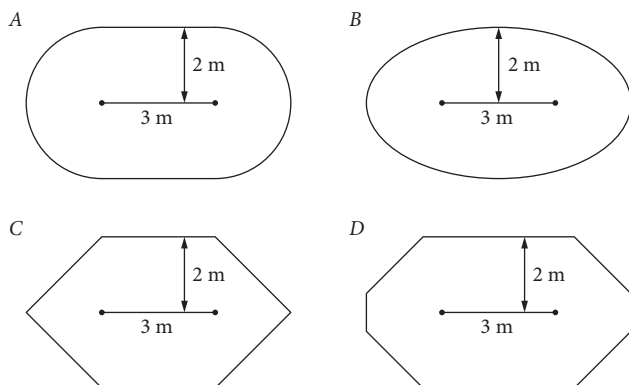
Az  $ABCD$  négyzet oldalának hossza 12 egység. A négyzet belsejében kijelöltük az  $E$  pontot úgy, hogy  $BE = CE = 12$  egység legyen (lásd az ábrát). Számítsd ki az  $A$  és  $E$  pontok távolságát!



**12** Egy téglalap átlója az egyik oldal kétszerese. Mekkora az átlóinak a hajlásszöge?

**13** (Kompetenciamérés, 2006 nyomán)

Egy 3 méter szélességű biztonsági kapu a kapu alapvonalának minden pontjától legfeljebb 2 méter távolságig érzékeli a mozgást. Az alábbi ábrák közül melyik mutatja a kapu által biztosított területet az alapvonal síkjában?



**14** Szerkessz derékszögű háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara és az egyik hegyesszöge!

**15** Egy háromszög szögei  $68^\circ$  és  $76^\circ$ . Megrajzoljuk a beírható körét, s azt a három pontot, ahol az oldalak érintik a beírható kört. A három érintési pont alkot egy háromszöget. Mekkora ennek a háromszögnek a szögei?

**16** Szerkessz háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara, egyik oldala és az oldalon lévő egyik szög!

**17** Szerkessz háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara, egyik oldala és az oldalhoz tartozó súlyvonala!

**18** Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, ha adott a köré írható kör sugara és az alapja!

**19** Egy háromszöget a középvonalaival négy háromszögre bontunk. Ezek kerületeinek összege 32 cm. Mekkora az eredeti háromszög kerülete?

**20** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 7 cm. Milyen távol van az átfogó felezőpontja a másik befogótól?

**21** Egy derékszögű háromszög befogói 45 mm és 28 mm hosszúak. Milyen messze van a súlypontja a derékszögű csúcstól?

**22** Egy derékszögű háromszög egyik befogója 39 mm, átfogója 89 mm. A súlypontját összekötjük a csúcsaival, így három darab háromszögre bontjuk. Mennyi a keletkező háromszögek kerülete?

**23** Vegyél fel a füzetedben három, nem egy egyenesre eső pontot! Jelöld el a pontokat  $A$ ,  $B$  és  $S$  betűkkel! Szerkeszd meg azt a háromszöget, amelynek két csúcsa  $A$  és  $B$ , súlypontja pedig  $S$ !

**24** Egy derékszögű háromszög befogói 20 mm és 21 mm. Milyen messze van a befogók felezőpontjától a derékszögű csúcsból húzott magasság talppontja?

**25** Egy 2,4 cm sugarú körhöz egy külső  $P$  pontból meghúztuk a két érintőt. Az érintők  $120^\circ$ -os szöget zárnak be egymással. Milyen messze van  $P$  a kör középpontjától?

**26** Egy háromszög oldalai 15 cm, 20 cm és 25 cm. Mekkora a köré írható kör sugara?

**27** Egy  $ABC$  háromszögben az  $A$ -ból, illetve a  $B$ -ből húzott magasságok talppontjai legyenek  $T_a$  és  $T_b$ ! Határozzuk meg az  $AB$  oldal ismeretében, hogy milyen távol vannak ezek a talppontok az  $AB$  oldal felezőpontjától? Indokold a válaszodat!

**28** Egy derékszögű háromszögről tudjuk, hogy az átfogója négyszerese a hozzá tartozó magasságnak.

- Készíts ábrát a háromszögről és a hozzá tartozó Thálész-köréről!
- Mekkora a háromszög szögei?

**29** Egyes országok (pl. Salamon-szigetek, Bhután, Namibia vagy Tanzánia) nemzeti lobogójának alapja az átlósan kettéosztott téglalap. Az ábrán a Salamon-szigetek zászlaja látható.



A téglalap 1 : 2 oldalarányával rendelkezik, a közepén átívelő sárga csík az oldalak huszadolópontjait köti össze.

Legyen a téglalap rövidebbik oldalhossza 1 egység, a hosszabbik 2 egység.

a) Számítsd ki, hogy mekkora a zöld és a kék háromszögek területe!

b) Számítsd ki a három tartomány kerületét!

30. A képen Namíbia zászlaja látható. A zászló 2 : 3 oldalarányúval rendelkezik. A fehér csíkok

az oldalak  $\frac{16}{20}$ -a és  $\frac{17}{20}$ -a közötti szakaszokat kötik össze.

Legyen a téglalap rövidebbik oldala 2 egység, a hosszabbik oldala 3 egység.

a) Számítsd ki a kék és zöld háromszögek területét!

b) Számítsd ki a zöld és a kék háromszög kerületét is!

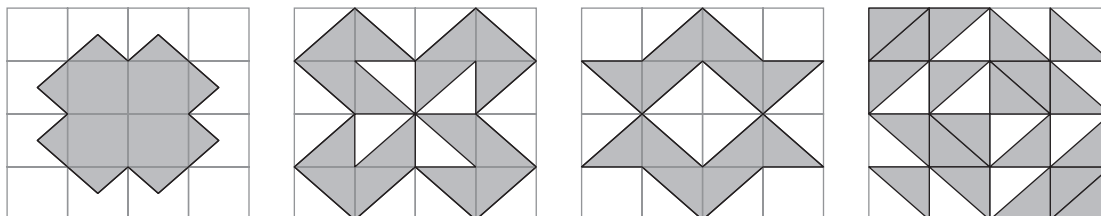


31. (Kompetenciamérés, 2014)

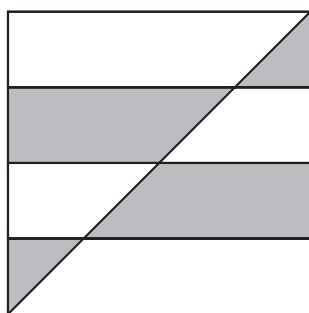
Krisztina ágytakarót szeretne készíteni fehér és sötétkék színű anyagból. Mindkét anyag 2 méter széles, a fehérből egy 1,5 méter hosszú, a sötétkékből egy 2,5 méter hosszú darabja van. Az anyagokat négyzet és háromszög alakú darabokra vágva, majd ezeket összevarrva szeretne összeállítani egy négyzet alakú ágytakarót a következő ábrákon látható minták valamelyike szerint.

Melyik mintát válassza Krisztina, ha az összes anyagot szeretné felhasználni?

Válaszod indokold!

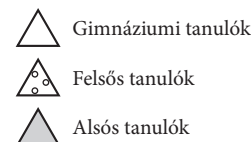
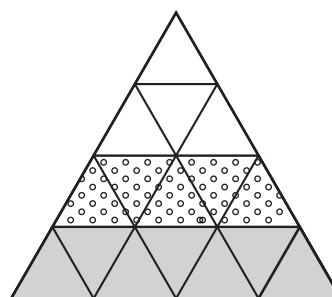


32. (Kompetenciamérés, 2003)



Egy négyzetet az ábrán látható módon, négy azonos méretű (egybevágó) téglalapra osztunk fel, meghúzzuk egyik átlóját, majd az így kapott alakzatokat az ábrán látható módon beszínezzük.

Hányad része a sötéttel színezett rész területe az eredeti négyzet területének?



33. (Kompetenciamérés, 2013)

A következő diagram egy 12 évfolyamos iskola tanulói összetételét mutatja.

A táblázatok közül melyik mutatja helyesen az iskolába járó tanulók összetételét?

A)

| Tanulók            | Fő  |
|--------------------|-----|
| Alsós tanulók      | 420 |
| Felső tanulók      | 375 |
| Gimnáziumi tanulók | 120 |

B)

| Tanulók            | Fő  |
|--------------------|-----|
| Alsós tanulók      | 315 |
| Felső tanulók      | 225 |
| Gimnáziumi tanulók | 180 |

C)

| Tanulók            | Fő  |
|--------------------|-----|
| Alsós tanulók      | 280 |
| Felső tanulók      | 257 |
| Gimnáziumi tanulók | 204 |

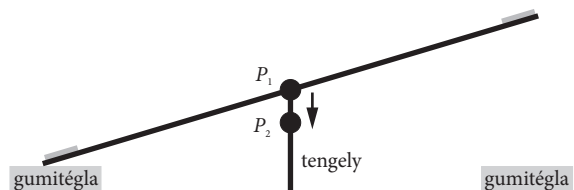
D)

| Tanulók            | Fő  |
|--------------------|-----|
| Alsós tanulók      | 475 |
| Felső tanulók      | 395 |
| Gimnáziumi tanulók | 305 |



**34.** (Kompetenciamérés, 2016)

Egy mérleghinta rögzített pontja 90 cm-es magasságnál található ( $P_1$  pontban), de 60 cm-es magasságra „leengedhető” ( $P_2$  pontba), ahogyan az ábrán látható.



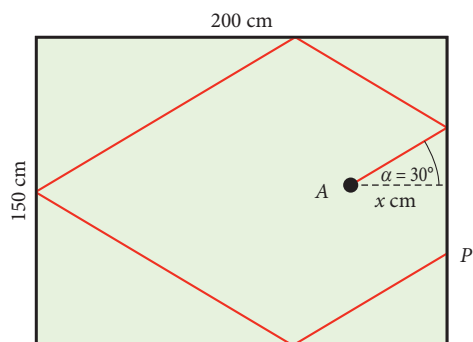
A talajhoz ütközés csillapítására gumitéglát helyeznek el a mérleghinta alatt. Ahol az ülés vége a gumitéglával érintkezik, a gumitégla idővel elkopik, elszíneződik.

Melyik igaz az alábbiak közül?

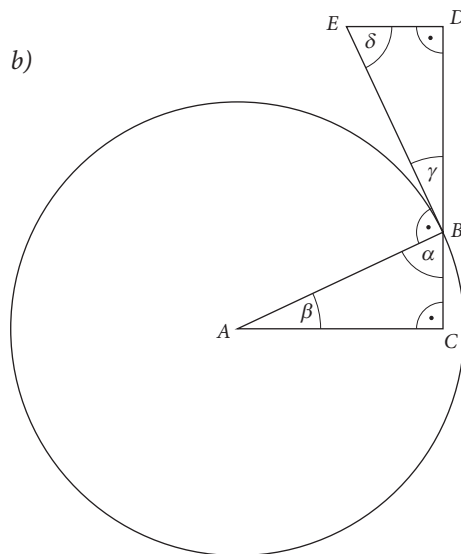
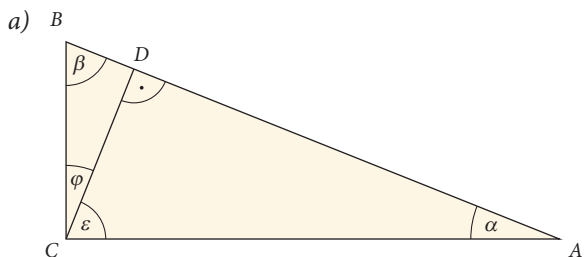
- A Ugyanott kopik a gumitégla a 60 cm és a 90 cm-es beállításnál.
- B 60 cm-es rögzítésnél a mérleghinta tengelyéhez közelebb kopik a gumitégla, mint a 90 cm-es rögzítésnél.
- C 60 cm-es rögzítésnél a mérleghinta tengelyétől távolabb kopik a gumitégla, mint a 90 cm-es rögzítésnél.
- D Ennyi adatból nem határozható meg, hogyan helyezkedik el egymáshoz képest a két kopásvonal.

**35.** Az ábrán egy biliárdasztalt látunk. Az  $A$  egyenlő távolságra van az asztal hosszabb oldalaitól.

- a) Mekkora utat tesz meg a golyó, míg  $A$ -ból a  $P$  pontba jut, ha  $x = 50$  cm?
- b) Megválasztható-e az  $x$  értéke úgy, hogy a  $P$  pontból való visszapattnás után a biliárdgolyó ismét áthaladjon a kiindulási helyén ( $A$ )?

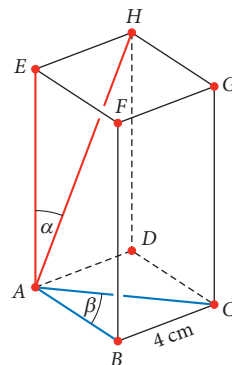


**36.** Az  $ABC$  háromszög  $C$ -nél derékszögű. Keress az ábrákon merőleges szárú szögeket!



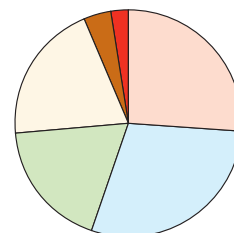
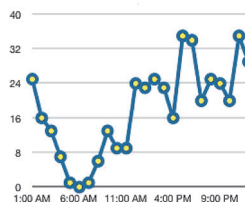
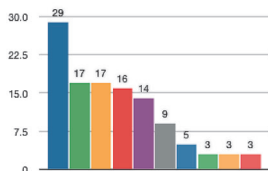
**37.** Egy négyzetes oszlop felületén bejelöltük az  $\alpha$  és  $\beta$  hegyesszöget. Az  $\alpha$  szög  $AE$  szárá merőleges a  $\beta$  szög  $AC$  szára, és az  $\alpha$  szög  $AH$  szárá merőleges a  $\beta$  szög  $AB$  szára. Tehát  $\alpha = \beta$ .

Helyes-e ez a következtetés? Miért?



## BEVEZETŐ

A matematika egyik fontos feladata, hogy nagy mennyiségű összegyűjtött adatból általános következtetéseket vonjon le, ezek segítségével tájékozódjon a jelenben, illetve megpróbálja jövőbeni események lefolyását megjósolni. Az adatok összegyűjtésével, rendszerezésével és elemzésével foglalkozik a statisztika.



## KIDOLGOZOTT FELADAT

- 1.** Egy rendőrségi traffipax (sebességmérő radar) az autópályán tíz perc alatt a következő sebességeket mérte (az adatok  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban értendők):

130, 130, 128, 128, 120, 115, 130, 127, 127, 125, 130, 130, 132, 140, 132, 127, 125, 128, 130, 127, 130, 125, 128, 132, 130, 130, 127, 128, 162, 130, 135, 132, 130, 120, 125, 127, 130, 128, 132, 128, 127, 125, 130, 130, 128, 130, 125, 130, 132, 128, 128, 130, 140, 135, 130, 130, 120, 130, 130, 127.

Mennyire jellemző az elhaladó autósokra a  $130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  sebességhatár megszegése?

## Megoldás

Az adatok jobban áttekinthetővé, gyorsabban és könnyebben feldolgozhatóvá válnak, ha azokat rendszerezzük, **táblázatba** foglaljuk. A táblázat megmutatja, hogy bizonyos sebességgel hány autós közlekedett. A táblázat alapján könnyen megállapíthatjuk, hogy 11 autó lépte túl a sebességhatárt.

| Sebesség (km/h)          | 115 | 120 | 125 | 127 | 128 | 130 | 132 | 135 | 140 | 162 | Összesen: |
|--------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| Autók száma (gyakoriság) | 1   | 3   | 6   | 8   | 10  | 21  | 6   | 2   | 2   | 1   | 60        |

Más szavakkal: a mérések között a  $130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -t meghaladó sebességek **gyakorisága** 11 volt.

Önmagában ez a szám nem sokat árul el arról, hogy az autósok általában betartják-e a szabályt, mert nem mindegy, hogy pl. 60 megmért sebesség között volt 11 szabálytalan, vagy mondjuk 22 megmért sebesség között találtak 11-et.

Szemléletesebbé tehetjük a szabálysértések számát úgy, ha megadjuk, hogy a vizsgált esetek mekkora részében voltak szabálytalanok az autóvezetők.

A 11 a 60-nak a  $\frac{11}{60}$  része, azaz kb. 18%-a. Ez az arány a  $130 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -t átlépők számának **relatív gyakorisága** a 60 mért sebesség között.

A sebességhatárt jelentősen, azaz 10%-ot meghaladó mértékben túllépők gyakorisága 1, relatív gyakorisága pedig  $\frac{1}{60} \approx 0,017$  ( $\approx 1,7\%$ ) volt.

Ha egy kísérletet, megfigyelést  $n$ -szer végeztünk el, és  $k$ -szor kaptunk meg egy eredményt, akkor azt mondjuk, hogy ennek az eredménynek a **gyakorisága**  $k$ , a **relatív gyakorisága** pedig  $\frac{k}{n}$ .

Itt az  $n$  pozitív egész, a  $k$  nemnegatív egész szám és  $k \leq n$ .

A relatív gyakoriság jobban jellemzi az eseményt, mint a gyakoriság, mert azt mutatja meg, hogy az esetek hányadrésében kaptuk meg a vizsgált eredményt.

Az olyan táblázatot, amely az egyes adatok előfordulásának arányát mutatja, **relatív gyakorisági táblázatnak** nevezzük.

A relatív gyakoriságot a könnyebb érthetőség kedvéért sokszor százalékban adják meg.

Az ilyen típusú feladatok megoldása során figyelj a kerekítésekre, és ellenőrizd, hogy az egyes sorokban lévő relatív gyakoriságok összege 1-et adjon, a százalékban kifejezett értékek összege pedig 100%-ot!

## KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Egy cipőbolt eladói egy délután statisztikát készítettek a náluk vásárolt cipők méretéről. A táblázatban azt is feltüntették, hogy a vevők milyen arányban vásárolták az egyes méreteket.

A táblázat alapján válaszoljunk a következő kérdésekre!

- Milyen méretű cipőből vettek a legtöbbet (melyik volt a leggyakoribb eladott méret)?
- Az összes eladott pár cipő hányadrésze volt 40-es (mekkora volt az eladott cipők között a 40-es méretűek relatív gyakorisága)?
- Az eladások között mekkora volt a 42-es vagy annál kisebb méretű lábbeli eladásának gyakorisága?

| Cipőméret | Vásárlók száma (gyakoriság) | Relatív gyakoriság |                       |
|-----------|-----------------------------|--------------------|-----------------------|
|           |                             | Arány              | % (egészre kerekítve) |
| 38        | 2                           | 2/60               | 3                     |
| 39        | 3                           | 3/60               | 5                     |
| 40        | 6                           | 6/60               | 10                    |
| 41        | 8                           | 8/60               | 13                    |
| 42        | 11                          | 11/60              | 18                    |
| 43        | 13                          | 13/60              | 22                    |
| 44        | 9                           | 9/60               | 15                    |
| 45        | 8                           | 8/60               | 13                    |
| Összesen: | 60                          | 60/60              | 100                   |

Megoldás

- A táblázat alapján 43-asból.
- 60 párból 6, azaz az eladott cipők  $\frac{6}{60}$  része volt 40-es.

Megjegyzés: Mivel  $\frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0,1$ , válaszunkat így is megfogalmazhatjuk: az eladott cipők 0,1 része (10%-a) volt 40-es.

- $2 + 3 + 6 + 8 + 11 = 30$ .



A relatív gyakoriság kiszámítását táblázatkezelő programra is bízhatjuk.



## FELADAT

1. Egy osztály tanulói egy 20 pontos röpdolgozatra a következő pontszámokat kapták: 15, 16, 10, 15, 13, 12, 17, 15, 16, 20, 19, 15, 16, 13, 10, 6, 10, 19, 16, 13, 14, 17, 12, 17, 15, 14, 16, 19, 10, 12. Rendezd az adatokat gyakorisági táblázatba! Add meg az egyes adatok relatív gyakoriságát is!

2. Megkérdeztek 25, harminc év alatti fiatalot, hogy 2019-ben hány alkalommal voltak színházban. A válaszok a következők voltak: 5, 3, 0, 4, 7, 5, 6, 2, 0, 4, 10, 4, 6, 8, 4, 2, 0, 1, 5, 3, 6, 9, 3, 5, 0.

- Rendezd a válaszokat gyakorisági táblázatba, és add meg az egyes válaszok relatív gyakoriságát is! A füzetedben dolgozz!
- Az adatok feldolgozásakor megvizsgálták, mennyi a megkérdezettek között azoknak a relatív gyakorisága, akik **legfeljebb** egyszer, **legfeljebb** kétszer, ..., **legfeljebb** 10-szer voltak színházban. Töltsd ki a táblázatot te is! A füzetedben dolgozz!

|                    | Gyakorisága | Relatív gyakorisága |
|--------------------|-------------|---------------------|
| Egyszer sem        |             |                     |
| Legfeljebb 1-szer  |             |                     |
| Legfeljebb 2-szer  |             |                     |
| Legfeljebb 3-szor  |             |                     |
| Legfeljebb 4-szer  |             |                     |
| Legfeljebb 5-ször  |             |                     |
| Legfeljebb 6-szor  |             |                     |
| Legfeljebb 7-szer  |             |                     |
| Legfeljebb 8-szor  |             |                     |
| Legfeljebb 9-szer  |             |                     |
| Legfeljebb 10-szer |             |                     |

3. Teri mama szerencseszámai a 3, a 7 és a 13. A hatoslottón a 2000–2007 években 426-szor történt húzás, és minden alkalommal hat számot húztak ki. Az eredményeket összesítve Bence azt látta, hogy Teri mama számait rendre 59, 56, illetve 63 alkalommal húzták ki (a hatoslottón az első 45 pozitív egész szám közül húznak ki 6-ot).

- Számítsd ki Teri mama szerencseszámainak relatív gyakoriságát a 426 húzás alapján!
- Ugyanezt a 426 húzást vizsgálva látható, hogy a leggyakrabban kihúzott szám a 35 (69 alkalommal húzták ki), a legritkábban kihúzott pedig a 19 volt (42-szer húzták ki). Mekkora a 35 és a 19 relatív gyakorisága a vizsgált húzások során?
- Mennyi lenne az egyes lottószámok gyakorisága, illetve relatív gyakorisága a 426 húzás során, ha mindegyiket ugyanannyiszor (vagy legalábbis majdnem ugyanannyiszor) húzták volna ki? Ennek alapján valóban szerencseszámoknak nevezhetőek-e Teri mama kedvenc számai?

## HÁZI FELADAT

1. Egy autókereskedő hónapról hónapra feljegyezte az eladott autók számát:

| Hónap               | Január | Február | Március | Április | Május | Június | Július | Augusztus | Szeptember | Október | November | December |
|---------------------|--------|---------|---------|---------|-------|--------|--------|-----------|------------|---------|----------|----------|
| Eladott autók száma | 14     | 16      | 20      | 19      | 11    | 12     | 12     | 18        | 20         | 17      | 11       | 18       |

- Összesen hány autót adott el a kereskedő az év során?
- Hány autót adott el az első negyedévben?
- Egészítsd ki a táblázatot egy harmadik sorral, amely azt mutatja, hogy az adott hónap végéig hány autót adott el a kereskedő az év során összesen!  
Melyik hónapban lépte át az addig eladott autók száma a 100-at?
- Melyik hónap folyamán érte el az éves eladás 50%-át?

2. Egy főút mentén 15 percen keresztül forgalom-számlálást végeztek. Az eredmények nyers formában itt láthatók:

Személyautó: |||| |||| |||| |||| |||| ||

Teherautó: |||| |||| |

Autóbusz: |||| ||

Motorbicikli: |||| ||

Egyéb jármű: ||

- Hány jármű haladt el a számláló előtt az egyes fajtákból?
- Az elhaladó járművek hányadrésze volt teherautó, és mekkora volt az autóbuszok relatív gyakorisága?
- Készítsd el az adatok gyakorisági és relatív gyakorisági táblázatát!

- 3 500 készüléket ellenőriznek úgy, hogy véletlenszerűen kiválasztanak közülük harmincat, és megszámlálják, hogy hány hibás van közöttük. Ezt a vizsgálatot tízszer végzik el. A táblázat a vizsgálat sorozat eredményét mutatja. Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

| Hibás készülékek száma a mintában (db) | Gyakorisága | Relatív gyakorisága |
|----------------------------------------|-------------|---------------------|
| 0                                      | 1           |                     |
| 1                                      | 4           |                     |
| 2                                      | 3           |                     |
| 3                                      | 2           |                     |
| 4 vagy több                            | 0           |                     |

- 4 A következő táblázat azt mutatja, hogyan sikerült a legutóbbi matematika felmérő dolgozat egy gimnázium három kilencedikes osztályában:

| Osztály | A dolgozatjegyek |    |    |   |   |                     |     |   |       |       |
|---------|------------------|----|----|---|---|---------------------|-----|---|-------|-------|
|         | 5                | 4  | 3  | 2 | 1 | 5                   | 4   | 3 | 2     | 1     |
|         | gyakorisága      |    |    |   |   | relatív gyakorisága |     |   |       |       |
| 9. A    | 7                | 6  | 4  | 1 | 1 |                     |     |   |       |       |
| 9. B    | 3                | 4  | 10 | 2 | 0 |                     |     |   |       |       |
| 9. C    |                  | 12 |    |   |   | 0,083               | 0,5 |   | 0,333 | 0,083 |

Mi kerül a táblázat üresen hagyott celláiba? (A füzetedben dolgozz!)

## RÁADÁS

### A legjobb autó

Egy autósújság az új autók értékeléséhez egy pontrendszert használ, és az Év autója címet annak az autónak adja, amelyik a legtöbb pontot éri el. Öt új autót értékelnek, amelyek pontszámait a mellékelt táblázatban láthatjuk.

| Autó | Biztonsági felszereltség (B) | Üzemanyag-felhasználás (Ü) | Külső megjelenés (K) | Belső felszereltség (F) |
|------|------------------------------|----------------------------|----------------------|-------------------------|
| Ca   | 3                            | 1                          | 2                    | 3                       |
| M2   | 2                            | 2                          | 2                    | 2                       |
| Sp   | 3                            | 1                          | 3                    | 2                       |
| N1   | 1                            | 3                          | 3                    | 3                       |
| KK   | 3                            | 2                          | 3                    | 2                       |

A pontszámok jelentése a következő: 3 pont = kitűnő; 2 pont = jó; 1 pont = közepes.

- a) Egy autó összpontszámának kiszámításához az újság az alábbi szabályt használja, ami tulajdonképpen az egyes pontszámok súlyozott összesítése:

$$\text{összpontszám} = (3 \cdot B) + \ddot{U} + K + F.$$

Számítsd ki mind az öt autó összpontszámát, és rakd az autókat ez alapján sorrendbe! Melyik autó a győztes?

- b) A „Ca” autó gyártója úgy gondolja, hogy az összpontszám kiszámításának szabálya nem igazságos.

Írj egy olyan számítási szabályt, amely alapján a „Ca” autó lenne a győztes!

Az általad megadott szabályban szerepelnie kell mind a négy változónak. Úgy add meg a szabályt, hogy az alábbi egyenlet négy pontozott vonalára pozitív számokat írsz! A füzetedben dolgozz!

$$\text{Összpontszám} = \dots \cdot B + \dots \cdot \ddot{U} + \dots \cdot K + \dots \cdot F.$$

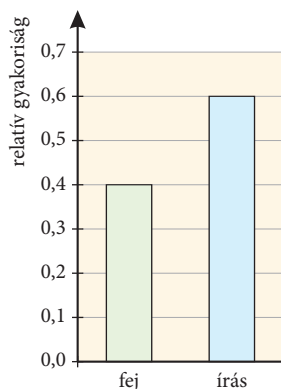
## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy érmét 20-szor feldobva a következő sorozatot kaptuk: F, F, F, I, I, F, I, I, I, I, I, F, I, I, F, F, I. (Az F azt jelenti, hogy „fejet” dobtunk, az I pedig azt, hogy „írást”.)

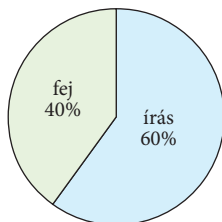
- Mennyi a fej és az írás relatív gyakorisága?
- Ábrázoljuk a relatív gyakoriságokat oszlopdiagramon és kördiagramon!
- Minden egyes dobás után adjuk meg a fej gyakoriságát az addigi dobások közül, és számítsuk ki a fej relatív gyakoriságát is! Az eredményeket foglaljuk táblázatba, majd ábrázoljuk vonaldiagramon a relatív gyakoriság változását!

## Megoldás

- A 20 dobásból álló sorozatban a fej gyakorisága 8, az írásé pedig 12. A fej relatív gyakorisága  $\frac{8}{20} = 0,4$ , az írásé pedig  $\frac{12}{20} = 0,6$ .
- A kördiagram elkészítéséhez a  $360^\circ$ -ot  $0,4 : 0,6 = 4 : 6$  arányban fel kell osztani.  $0,4 : 0,6 = 4 : 6$ , ezért a  $360^\circ$ -ot  $4 + 6 = 10$  egyenlő részre kell felosztani ( $1 \text{ rész} = 36^\circ$ ), majd ezt az értéket 4-gyel, illetve 6-tal szorozni ( $144^\circ$ ,  $216^\circ$ ). Ugyanezt kapjuk eredményként, ha a 20 dobásnak megfelelő teljes szöget, vagyis a  $360^\circ$ -os szöget osztjuk fel  $8 : 12$  arányban.



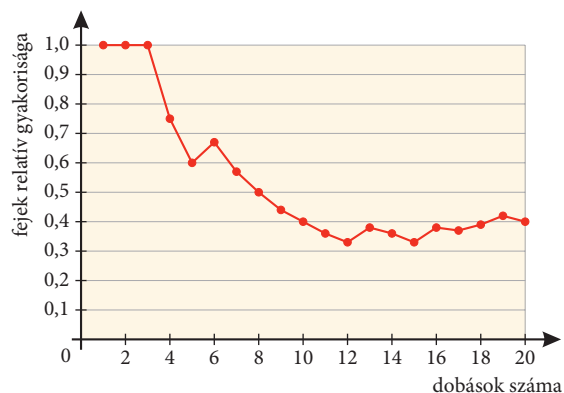
oszlopdiagram



kördiagram

c)

| Dobások száma | Fej gyakorisága | Fej relatív gyakorisága |
|---------------|-----------------|-------------------------|
| 1             | 1               | 1                       |
| 2             | 2               | 1                       |
| 3             | 3               | 1                       |
| 4             | 3               | 0,75                    |
| 5             | 3               | 0,60                    |
| 6             | 4               | 0,67                    |
| 7             | 4               | 0,57                    |
| 8             | 4               | 0,50                    |
| 9             | 4               | 0,44                    |
| 10            | 4               | 0,40                    |
| 11            | 4               | 0,36                    |
| 12            | 4               | 0,33                    |
| 13            | 5               | 0,38                    |
| 14            | 5               | 0,36                    |
| 15            | 5               | 0,33                    |
| 16            | 6               | 0,38                    |
| 17            | 6               | 0,35                    |
| 18            | 7               | 0,39                    |
| 19            | 8               | 0,42                    |
| 20            | 8               | 0,40                    |



vonaldiagram



A táblázatoknál szemléletesebb az adatok **grafikonon, diagramon** való ábrázolása, mert azok látványosabb módon adnak információt, és átláthatóbbá teszik az adathalmazt, az adatok változásának mértékét.

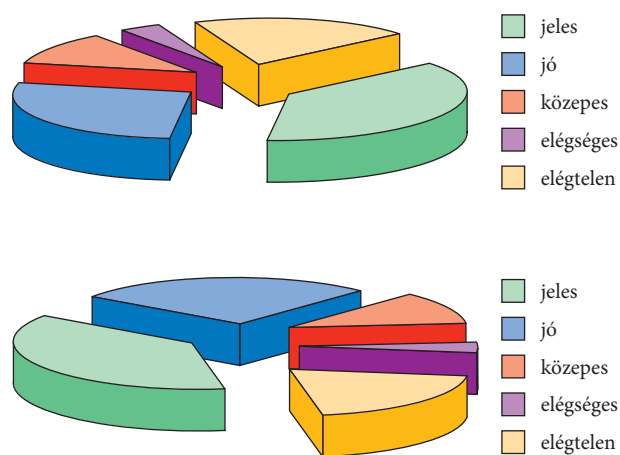
Az **oszlopdiaagramot** azonos szélességű téglalapok alkotják, melyek magassága arányos az ábrázolt adatok értékével. Használata célszerű, ha az adatok változását, egymáshoz való viszonyát akarjuk szemléltetni. Használata nem célszerű, ha van kiugróan nagy adat, vagy ha nagyon kicsi az eltérés az adatok között.

Az oszlopdiaagram elkészítésekor fontos a **lépték** helyes megválasztása és **arányos** használata a gyakoriságokat magában foglaló (általában függőleges) tengelyen. Fontos, hogy a tengely számozását 0-val kezdjük, mert a diagram így lesz informatív, és így mutatja korrekt módon (nem megtévesztően) az adatok közötti kapcsolatokat.

A **vonaldiaagram** a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolt görbe vagy összefüggő töröttvonal. Használata célszerű, ha szemléltetni szeretnénk az adatok egymáshoz való viszonyát, (leginkább időbeli) megváltozását.

**Kördiaagramon** ábrázoljuk az adatokat, ha azok relatív gyakoriságát szeretnénk szemléltetni. A teljes kör (360°-os középponti szögű körcikk) jelenti az adatok egészét (100%-ot). A kört olyan **körcikkekre** bontjuk, melyek **középponti szögeinek** nagysága az ábrázolandó adatok relatív gyakoriságai-  
val egyenes arányban áll. Kördiaagram használata nem ideális túl sok adat esetén, vagy ha több kicsi és több nagy adat van a vizsgálandók között.

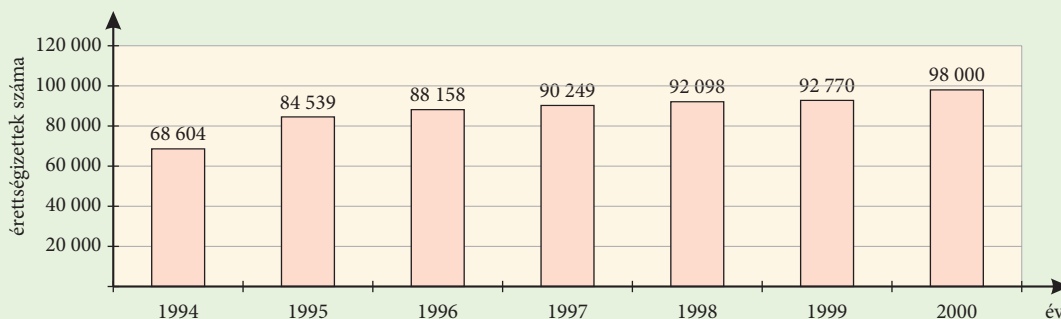
Vigyázni kell azzal, hogy a kördiaagram különböző térbeli megjelenítése rossz következtetésekre adhat okot.



Ugyanazon adatok ábrázolása más szemszögből

## FELADAT

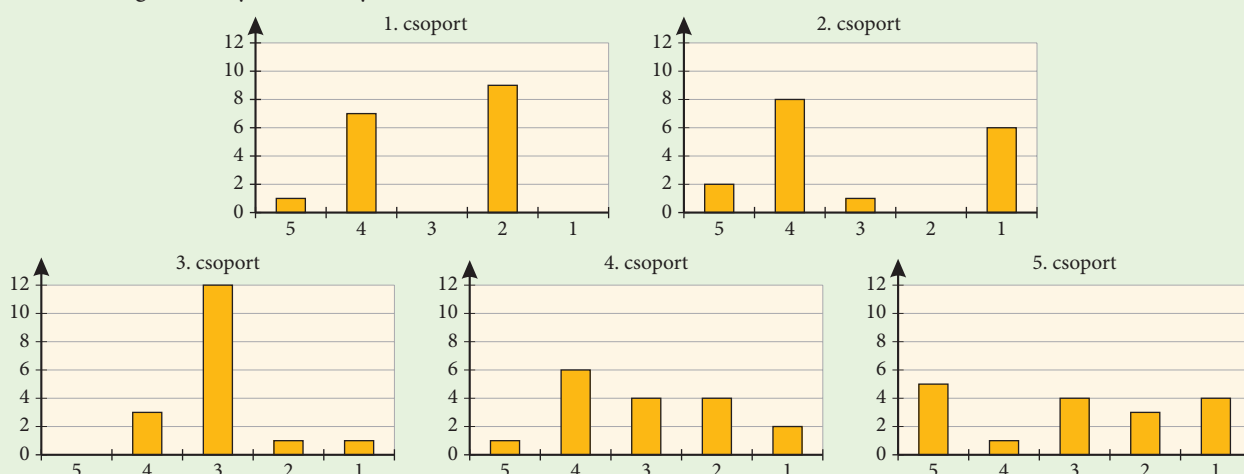
1. Ábrázold vonaldiaagramon az írások relatív gyakoriságának változását a kidolgozott feladatban!
2. Egy iskola menzáján 270-en ebédelnek. Ezen a héten 150-en választották az A menüt és 120-an a B menüt. Számold ki a kétféle menü választásának relatív gyakoriságát százalékban egy tizedesjegy pontossággal, és ábrázold a kapott értékeket oszlopdiaagramon és kördiaagramon is!
3. Foglalduk táblázatba az oszlopdiaagramon megjelenített adatokat! Egészítsük ki a táblázatot az érettségizők számának az előző évhez viszonyított változását szemléltető mezőkkel!



**4** Egy iskola menzáján 270-en ebédelnek. Ezen a héten 90-en választották az A menüt, 135-en a B menüt és 45-en a C menüt. Számold ki a háromféle menü választásának relatív gyakoriságát százalékban egy tizedesjegy pontossággal, és ábrázold a kapott értékeket oszlopdiagramon és kördiagramon is!

**5** Egy iskolában öt 17 fős diákcsoport ugyanazt a témazáró dolgozatot írta matematikából. A diagramok az egyes csoportok eredményét mutatják.

- Készíts táblázatot az egyes csoportok érdemjegyeinek eloszlásáról (gyakoriságáról)!
- Egészítsd ki a táblázatot az egyes csoportok átlagosztályzatával!
- Készíts gyakorisági táblázatot a 85 tanuló osztályzatairól, és számítsd ki a témazáró dolgozathoz elért átlagos osztályzatot!
- Jellemezd az egyes csoportok teljesítményét a saját szavaiddal! Melyik csoport teljesítményét jellemzi jól az átlagos osztályzat, és melyikét nem? Miért?



## HÁZI FELADAT

**1** Egy osztály tanulói körében a testvérek száma a táblázat szerinti gyakorisággal fordul elő.

- Add meg a testvérek számának relatív gyakoriságát százalékban! Válaszd egy tizedesjegy értékre kerekítve add meg! (A füzetedben dolgozz!)
- Készíts oszlopdiagramot a relatív gyakoriságokról!
- Ha az osztály évfárá bulit rendez, amelyre eljön az összes család minden gyereke, akkor hány gyerek lesz a buliban?

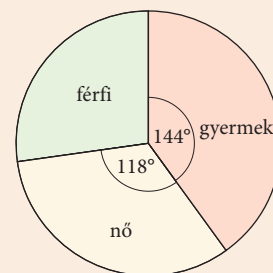
| Testvérek száma    | 0 | 1  | 2 | 3 |
|--------------------|---|----|---|---|
| Gyakoriság         | 7 | 11 | 5 | 2 |
| Relatív gyakoriság |   |    |   |   |

**2** Egy iskola menzáján 240-en ebédelnek, és háromféle menü közül választhatnak. A táblázat az egyes menüket választók relatív gyakoriságát mutatja.

- Számold ki, hányan választották az egyes menüket! (A füzetedben dolgozz!)
- Ábrázold kördiagramon az egyes menüket választók gyakoriságát!

|          | A menüt választók száma | Relatív gyakorisága |
|----------|-------------------------|---------------------|
| „A” menü |                         | 0,55                |
| „B” menü |                         | 0,3                 |
| „C” menü |                         | 0,15                |

- 3** A kördiagram egy 5400 lakosú település lakosságának megoszlását mutatja. Add meg a férfiak, a nők és a gyermekek százalékos eloszlását és létszámát!



- 4** A következő táblázat azt mutatja, hogyan sikerült a legutóbbi matematika felmérő dolgozat egy gimnázium négy kilencedikes osztályában:

| Az osztály |          | A<br>hiányzók<br>száma | A dolgozatjegyek |    |    |   |   |                     |      |       |      |      |
|------------|----------|------------------------|------------------|----|----|---|---|---------------------|------|-------|------|------|
| jele       | létszáma |                        | 5                | 4  | 3  | 2 | 1 | 5                   | 4    | 3     | 2    | 1    |
|            |          |                        | gyakorisága      |    |    |   |   | relatív gyakorisága |      |       |      |      |
| A          | 33       |                        | 8                |    |    | 3 | 2 | 0,25                |      | 0,219 |      |      |
| B          |          | 0                      | 7                | 10 |    | 2 | 2 |                     |      | 0,25  |      |      |
| C          | 29       | 4                      |                  |    |    |   |   |                     | 0,32 | 0,24  | 0,16 | 0,08 |
| D          | 31       | 1                      | 4                | 8  | 13 |   | 1 |                     |      |       |      |      |

- a) Töltsd ki a táblázat üresen hagyott celláit! A füzetedben dolgozz!  
b) Ábrázold közös grafikonon más-más színnel a négy osztály jegyeinek relatív gyakoriságát!  
c) Készíts táblázatot arról, hányan kaptak az egyes osztályokban legalább egyest, legalább kettést, legalább hármat, legalább négyest, legalább ötöst! Számítsd ki a relatív gyakoriságokat is! Készíts grafikont!



Az ábrázolás megoldható a *Graph* program segítségével is.

## RÁADÁS

A diagramok fő célja, hogy segítségükkel könnyen értelmezhető, áttekinthető formába rendezzük az adatokat. Szemléletes, jó diagramot készíteni azonban sokszor nem is olyan egyszerű feladat.

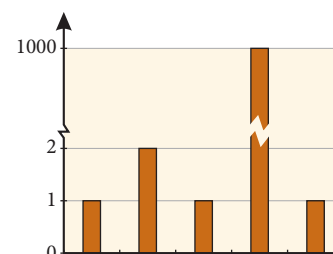
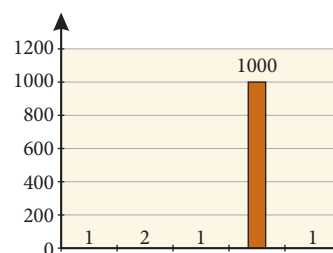
- 1.** Az adatok ábrázolásának egyik legnagyobb problémája a kiugró (a többi adathoz képest túl nagy vagy túl kicsi) értékek kezelése. Legyenek például az adataink: 1, 2, 1, 1000, 1.

Ha ezeket az adatokat oszlopdiagramon ábrázoljuk, akkor az 1000-es adat oszlopához képest a többi olyan kicsi, hogy nemhogy a köztük lévő különbségeket, de még magukat az oszlopokat sem látjuk.

Ha akkora diagramot rajzolnánk, amelyiken már jól látható a kis adatok közti eltérés, akkor meg az 1000-es oszlop „lógna ki” az ábrából.

Ennek a problémának egy lehetséges – bár nem túl elegáns – megoldása, hogy „megtörjük” a diagramot:

Ezen a diagramon jól megférnek egymással az adatok, csak hogy a figyelmetlen szemlélőnek könnyen úgy tűnhet, hogy a negyedik oszlop csak kb. 4 egység magas. Ezért különösen fontos, hogy a grafikon (és a függőleges tengely) megtörése nyilvánvaló és feltűnő legyen.

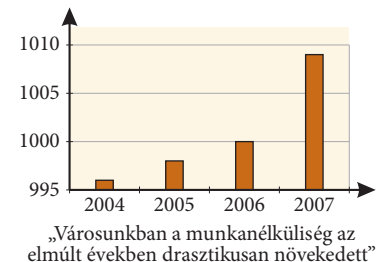
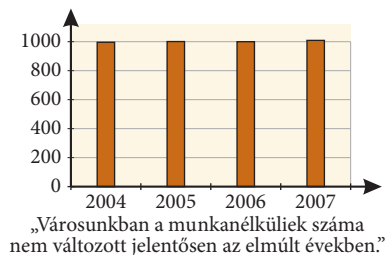


2. Problémát okoz a másik végtel is, amikor az adatok közötti különbségek túl kicsik. Az ilyen diagramokon minden oszlop egyformának tűnik, pont a lényeg – a különbségek – nem láthatók.

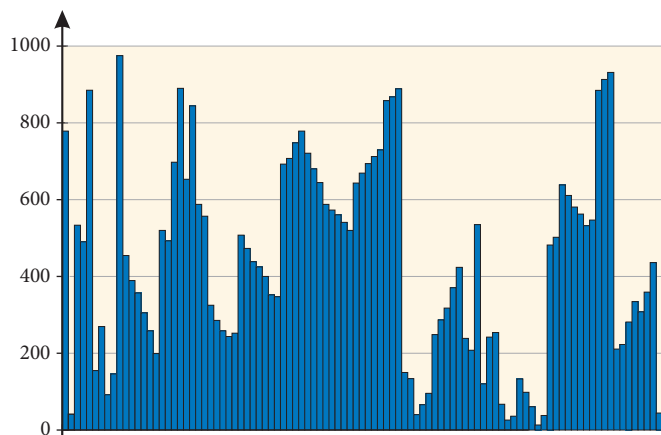
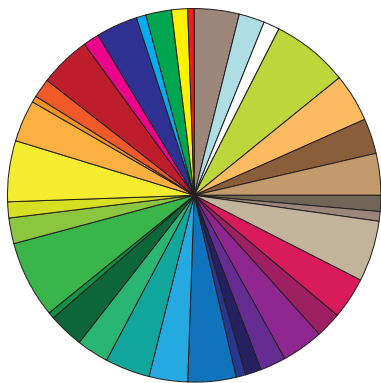
| Év                   | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 |
|----------------------|------|------|------|------|
| Munkanélküliek száma | 996  | 998  | 1000 | 1009 |

Ezen a problémán sokan úgy próbálnak segíteni, hogy kivágják a diagram „tetejét”, azaz itt a függőleges tengely beosztása nem nulláról indul. Ez a megoldás sokszor hasznos, azonban néha veszélyes is lehet, mert az eredmény könnyen megtévesztheti a felületes olvasót.

Te milyen diagram segítségével tudnád jobban szemléltetni az előbbi adatokat?



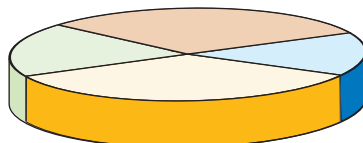
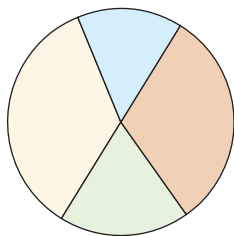
3. Ügyelnünk kell arra is, hogy egy túlszűfolt grafikonról semmit nem lehet érdemben leolvasni. Nem szabad tehát rengeteg adatot belezsúfolni egyetlen ábrába!



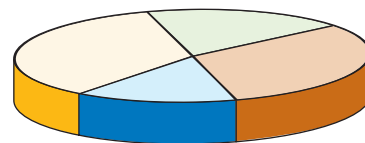
Az ilyen diagramok értelmezhetetlenek. Ha túl sok adatunk van, meg kell próbálnunk csoportokba (ún. osztályokba) sorolni őket. (Felidézheted az osztályba sorolásról tanultakat a 10. lecke alapján.)

4. Ma már a legegyszerűbb számítógépes adatkezelő programok is lehetőséget adnak látványos térbeli diagramok készítésére. A térbeli perspektíva azonban furcsa optikai csalódásokhoz vezethet!

A két alábbi, henger alakú grafikon **ugyanaz** a kördiagram, de különböző szögekből nézve! Az értelmezés mégis teljesen különböző. Ha például egy cég a piaci részesedését szeretné ábrázolni (zöld színnel az adott cég részesedése), akkor a különböző diagramok különböző hatást eredményezhetnek a részesedés mértékét illetően.



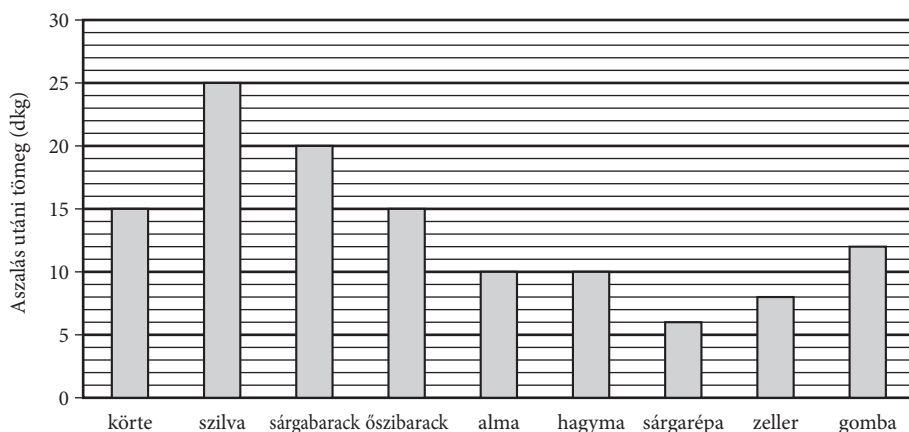
„Piaci részesedésünk alig töredéke a vezető cégek részesedésének”



„Piaci részesedésünk körülbelül a többi cégével azonos arányú”

## 1. (Kompetenciamérés, 2014)

Aszalás során a növények a vízvesztés miatt veszítenek tömegükből. Az alábbi diagram különböző, 100 dkg tömegű nyers növénynek aszalás utáni tömegét ábrázolja.



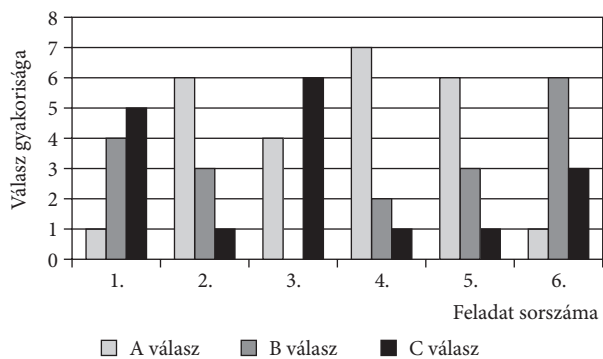
- a) A diagram adatai alapján dönts el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!
- A A vizsgált növények aszalás során tömegük kb. 75-94%-át veszítik el.
  - B A szilva veszíti el tömegének legnagyobb százalékát aszaláskor.
  - C Ugyanakkora tömegű sárgarépa és gomba aszalása után a sárgarépa tömege feleakkora lesz, mint a gombáé.
  - D Az aszalt sárgabarack tömege a nyers gyümölcs tömegének  $\frac{1}{5}$ -e.
- b) Sárgabarackot és őszibarackot aszaltunk. Az aszalás utáni össztömeg 82%-kal volt kevesebb, mint az eredeti tömeg. Az eredeti gyümölcs tömegének hány százaléka volt sárgabarack?
- c) Kétszer akkora tömegű almát aszaltunk, mint szilvát. Mi lesz az aszalás után az összetevők tömegének aránya?

## 2. (érettségi feladat nyomán)

Egy hatkérdéses tesztben minden kérdésnél a megadott három lehetőség (A; B és C) közül kellett kiválasztani a helyes választ. A tesztet tíz diák írta meg. Az alábbi diagram az egyes feladatokra adott válaszok eloszlását mutatja.

A teszt értékelésekor minden helyes válaszra 1 pont, helytelen válaszra pedig 0 pont jár. Tudjuk, hogy a tíz diák összesen 35 pontot szerzett.

Állapítsd meg az alábbi állításokról, hogy biztosan igaz, lehetséges vagy nem igaz állítások. A megfelelő válaszhoz tartozó betűkből egy híres magyar színész vezetéknevét rakhatod ki. Rakd a betűket helyes sorrendbe!



|                                                                                      | biztosan igaz | lehetséges | nem igaz |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------|----------|
| Volt olyan diák, aki nem válaszolt minden kérdésre.                                  | K             | M          | U        |
| A helyes válaszok száma 5-tel több, mint a helytelen válaszok száma.                 | A             | G          | R        |
| Van olyan kérdés, amelyre nem az a jó válasz, amit a legtöbben jelöltek be.          | T             | P          | Ó        |
| Van olyan diák, aki az első és az utolsó kérdést egyaránt elhibázta.                 | I             | J          | N        |
| Van olyan diák, aki minden kérdésre a jó választ jelölte.                            | O             | S          | L        |
| Kevesebb olyan kérdés volt, amelyre a C válasz volt helyes, mint amelyre a B válasz. | B             | A          | O        |

## BEVEZETŐ

A minket körülvevő világ állandóan mozgásban van, folyamatosan változik. Változik az időjárás, a hőmérséklet a nap folyamán, de éves periódusokban is. Változik a boltok kínálata, az árak, változnak az ismerőseink és mi magunk is. Természetesen lehetetlen mindezt együttesen leírni, de bizonyos kiszemelt mennyiségek változását könnyen nyomon követhetjük. Sokszor megkönnyíti a dolgunkat, ha grafikonon ábrázoljuk a folyamatot.



## FELADAT

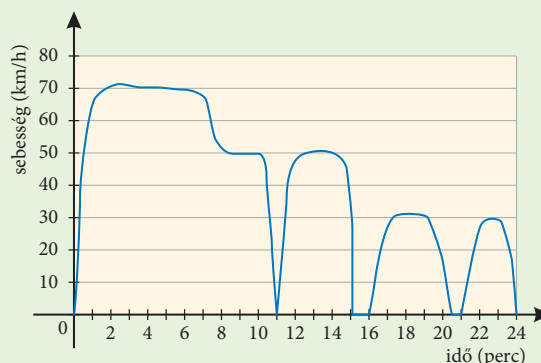
- 1  A tachográf (menetíró) olyan készülék, amely mozgó járművek – elsősorban buszok, teherautók – sebességadatait jegyzi későbbi ellenőrzés céljából.



Egy helyközi autóbuszjárat egyik utasa zúzódásos sérüléssel jelentkezett a városi kórházban. Állítása szerint a busz hirtelen fékezett, ő pedig elesett. A közlekedési vállalatnál jegyzőkönyvet vettek fel a panaszról, ebben az utas a következőképpen mesélte el a történeteket:

„A kövespusztai megálló után egy darabig még úgy 70-nel mehettünk az országúton, aztán a város szélén a busz 50-re lassított. 2-3 perc után a piros lámpánál a vezető fékezett, aztán megállt. A lámpa elég hamar zöldre váltott, mehettünk tovább az alsóvárosi megállóig, ami kb. negyedórányi út a kövespusztaitól számítva. Itt nem volt senki, így a vezető lassítás nélkül, 50-nel ment tovább, egészen a következő jelzőlámpáig. Ott olyan hirtelen állt meg, hogy elestem. A következő megállónál le is szálltam.”

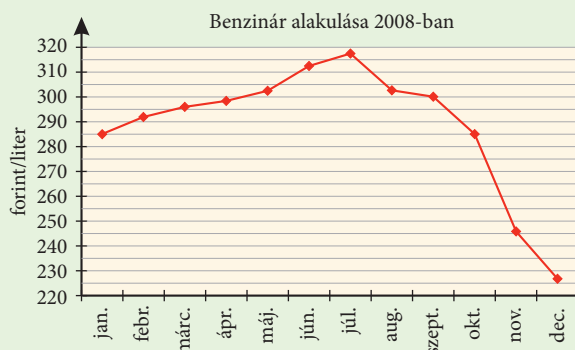
Az autóbusz-társaság bekérte a vezetőtől a busz tachográfját, amely a kérdéses időtartamról a következő grafikont rögzítette:



- Azonosítsd a grafikonon az út szakaszait a panaszos utas beszámolója alapján!
- A beszámoló melyik részei igazak, és hol állított valótlan az utas?
- Mi történt valójában azon a szakaszon, amellyel kapcsolatban nem mondott igazat az utas?
- Tudjuk, hogy a busz a kövespusztai megállótól indulva általában 7-8 perc alatt éri el a városhatárt. Ezt figyelembe véve megszegt-e valahol a busz vezetője a sebességhatárokat? (Az autóbuszok számára megengedett maximális sebesség városban  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , városon kívül  $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .)



2. A grafikon a 95-ös oktánszámú benzin árváltozásait mutatja egy benzinkútnál a 2008-as év során.



- a) Röviden írd le, mi történt a benzinárakkal az év folyamán! Térj ki arra, hogy melyik időszakban milyen irányú és mértékű a változás, mennyit változott a benzin ára az egyes időszakokban, illetve összesen!
- b) Foglald táblázatba a benzinárakat! A növekedést pozitív, a csökkenést negatív számokkal jelöld!

A grafikon és a táblázat alapján válaszolj a következő kérdésekre!

- A) Mennyit csökkent a benzin ára
- január és december között;
  - július és december között?
- B) Mennyi volt január és július között
- a legnagyobb;
  - a legkisebb;
  - az átlagos havi növekedés?
- C) Mennyi volt július és december között
- a legnagyobb;
  - a legkisebb;
  - az átlagos havi csökkenés?
- D) Megállapítható-e a grafikon alapján, hogy mennyibe került egy liter benzin május 17-én, illetve november 20-án?

## ELMÉLET

A grafikonok készítéséhez a **derékszögű koordináta-rendszert** használjuk. Ismételjük át, mit tanultunk erről!

**Derékszögű koordináta-rendszert** kapunk, ha két számegyenest úgy helyezünk merőlegesen egymásra, hogy a 0 jelzésű pontjuk közös legyen. Ezt a közös pontot **origónak** nevezzük.

Rajzunkon a vízszintes számegyenes az **első tengely** ( $x$  tengely, vagy más néven **abszcisszatengely**), a függőleges a **második tengely** ( $y$  tengely, vagy más néven **ordinátatengely**).

A két tengely a síkot **négy negyedre** vágja. Ezek számozását az ábra mutatja.

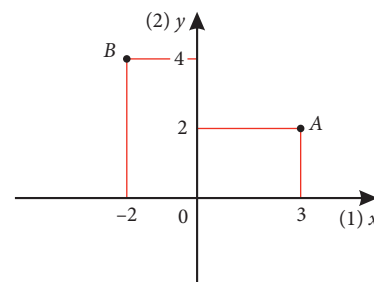
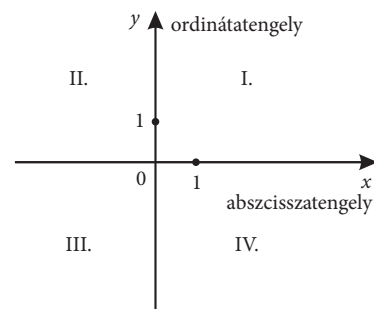
Ha egy síkban koordináta-rendszert veszünk fel, akkor e sík minden pontját egy **rendezett számpárral** (olyan számpárral, amelyben fontos a számok sorrendje is) jellemezzük.

*Például:*

Az ábránkon lévő A pontot a  $(3; 2)$  **rendezett számpárral**, a B pontot a  $(-2; 4)$  **rendezett számpárral**. A rendezett számpárok tagjait a pontok **koordinátáinak** nevezzük.

Az első koordinátát **abszcisszának**, a második koordinátát **ordinátának**, ebből adódóan az első tengelyt **abszcisszatengelynek**, a másodikat pedig **ordinátatengelynek** is nevezzük.

A statisztikai elemzések során készített diagramok tengelyein az adatokra vonatkozó vizsgálati szempontokat (pl. idősor, mennyiség) és tulajdonságokat (pl. testsúly, átlag, egységár, létszám) tüntetjük fel számértékekkel és mértékegységekkel.



## FELADAT

3 A grafikon egy versenyautó sebességének változását mutatja, amikor egy 3 kilométeres vízszintes pálya második körét futja.

a) Megközelítőleg mekkora a távolság a startvonal és a pálya leghosszabb egyenes szakaszának kezdőpontja között?

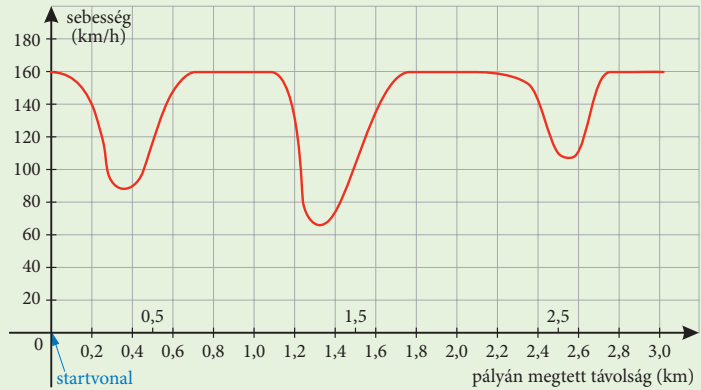
- A) 0,5 km      C) 2,3 km  
B) 1,5 km      D) 2,6 km

b) A pálya mely pontján mérték a legalacsonyabb sebességet a második körben?

- A) a startvonalnál      C) kb. 1,3 km-nél  
B) kb. 0,8 km-nél      D) a pálya felénél

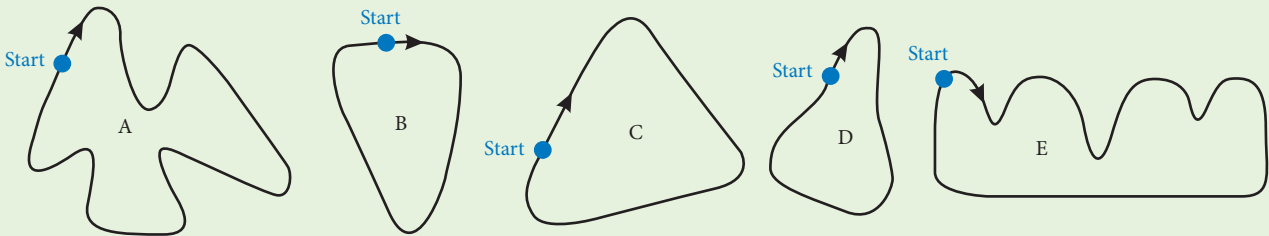
c) Mit lehet mondani az autó sebességéről a 2,6 km és a 2,8 km közötti szakaszon?

- A) Az autó sebessége állandó.  
B) Az autó sebessége csökken.  
C) Az autó sebessége növekszik.



D) Az autó sebességét nem lehet meghatározni a grafikon alapján.

d) Az alábbi ábrán öt különböző pálya rajza látható. A korábban szereplő sebességgrafikon alapján állapítsd meg, melyik pályán haladt a versenyautó!



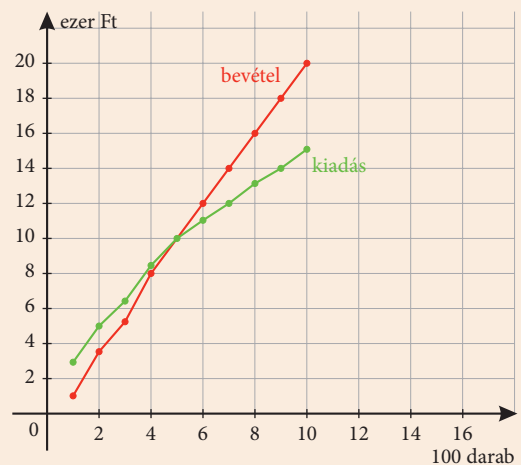
## HÁZI FELADAT

1 A két grafikon egy cég várható kiadásait és bevételeit szemlélteti a legyártott termékek számának függvényében. (A vízszintes tengelyen 1 egység 100 darabot jelöl, a függőleges tengelyen 1 egység ezer Ft-ot jelöl.)

a) Mivel magyarázható, hogy kisszámú termék esetén a kiadások felülmúlják a bevételeket?

b) Mi az a termékszám, aminél a cég nullszaldós, azaz a bevételek pont fedezik a kiadásokat?

c) Készíts olyan grafikon, amely a cég által termelt profitot (a bevétel és a kiadás különbségét) szemlélteti a legyártott termékek számának függvényében! (Veszteség esetén a profit negatív érték!)

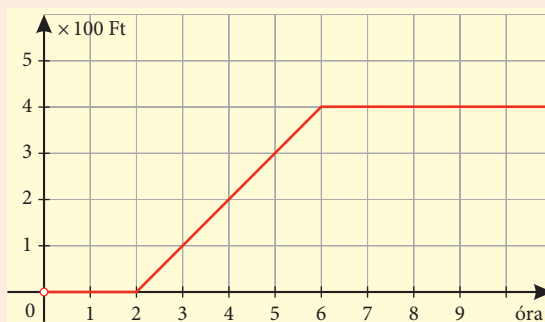
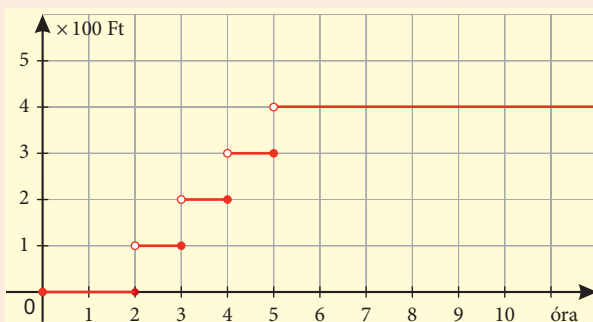


- 2.** Egy üzletház parkolójában az első két óráért nem kell parkolási díjat fizetni, utána viszont minden megkezdett óráért 100 forintot számolnak fel. A maximális díj csak 400 forint lehet.

a) Készítsd el a táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki!

|                     |   |   |     |   |     |     |   |
|---------------------|---|---|-----|---|-----|-----|---|
| Parkolási idő (óra) | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 3,8 | 4,5 | 6 |
| Parkolási díj (Ft)  | 0 |   |     |   |     |     |   |

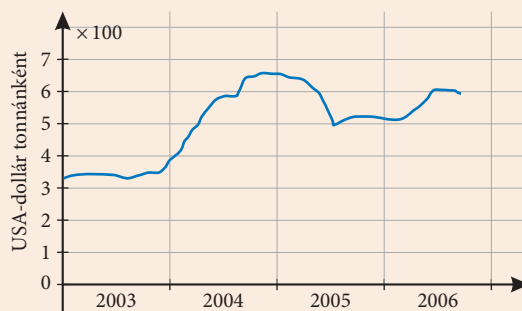
b) Melyik grafikon mutatja helyesen a parkolásért fizetendő összeget?



c) Miért helytelen a másik grafikon? Milyen körülmények között lenne az a helyes?

- 3.** A grafikon az acél világpiaci árának alakulását mutatja. Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül? Válaszodat indokold!

- a) 2005-ben az acél ára év végén alacsonyabb volt, mint év elején.  
b) Az acél ára 2005-ben folyamatosan csökkent.  
c) 2004-ben folyamatosan nőtt az acél ára.  
d) 2003-ban volt a legalacsonyabb az acél ára a vizsgált négy évben.  
e) Az acél tonnánkénti ára mindvégig 500 USA-dollár fölött volt a vizsgált években.  
f) A 2004-es év nagyobbik részében az acél tonnánkénti ára 500 USA-dollár fölött volt.



- 4.** Az ábrán egy üzletközpont parkolójában fizetendő díjak láthatók.

- a) Mennyi a parkolásért fizetendő összeg, ha a parkolási idő  
A) 45 perc;  
B) 2,5 óra;  
C) 4 óra 20 perc;  
D) 8 és fél óra?  
b) Jelenítsd meg grafikonon a parkolásért fizetendő összeget a parkolási idő függvényében!  
c) Lehet-e a (megszakítás nélküli) parkolásért fizetendő összeg 1000 forint?  
d) Mennyi ideig parkolt (megszakítás nélkül) a jármű, ha a parkolásáért 1550 forintot kellett fizetni?



| Parkolási idő      | Parkolási díj |
|--------------------|---------------|
| 0–1. óra           | Ingyenes      |
| 2. óra             | 200 Ft        |
| 3. óra             | 200 Ft        |
| 4. óra             | 250 Ft        |
| 5. óra             | 300 Ft        |
| minden további óra | 300 Ft        |

## CSOPORTMUNKA

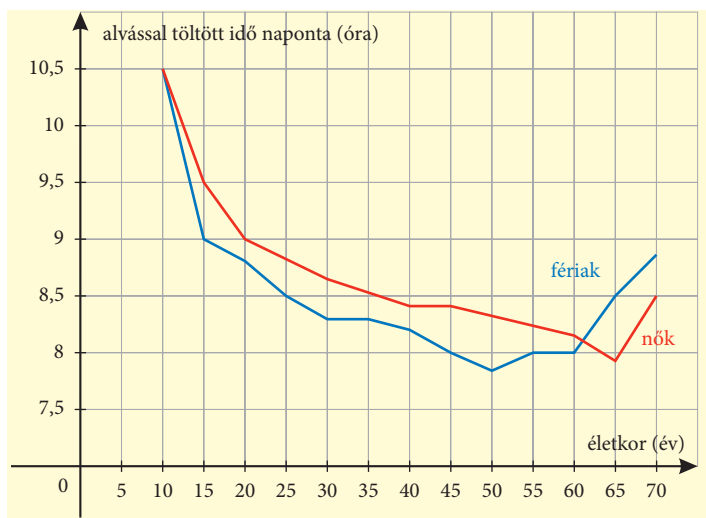
1. Egy felmérésben 1500-1500 véletlenszerűen kiválasztott 10 és 70 év közötti férfi és nő alvással töltött óráinak számát vizsgálták az életkoruk függvényében. Az eredményeket átlagolták, és így a következő grafikonot kapták:

- a) Az alábbi állítások közül melyik mennyire pontosan írja le a grafikonon látható jelenséget?

- A nők többet alszanak, mint a férfiak.
- A nők kb. 60 éves korukig több órát töltenek naponta alvással, mint a hasonló korú férfiak.
- A fiatal férfiak általában kevesebbet alszanak, mint a hasonló korú nők.
- Az idősebb férfiak kevesebbet alszanak, mint a fiatalok.

- b) Magyarázd meg, hogyan jelentkezik a grafikonon az a tény, hogy 40 és 60 éves koruk között a férfiak nagyjából ugyanannyi időt töltenek naponta alvással!

- c) Mivel tudnád alátámasztani a következő állítás igazságát? „A nők alvással töltött óráinak száma 10–15 éves korukban jóval erőteljesebben csökken, mint 20–25 éves korban.”



2. Magyarországon a személyi jövedelemadó mértéke 2011 előtt az éves jövedelem nagyságától függően ún. többkulcsos rendszerben változott. Ez azt jelenti, hogy magasabb jövedelmek esetén az adóalap egyre nagyobb és nagyobb százalékát kellett adóként megfizetni. Az adókulcsok szerkezetét 2005-ben módosították jelentősen, ekkor tértek át a korábbi három jövedelmi sávról kettőre.

| 2004                 |                                                   |
|----------------------|---------------------------------------------------|
| 0–800 000 Ft         | 18%                                               |
| 800 001–1 500 000 Ft | 144 000 Ft és a 800 000 Ft-on felüli rész 26%-a   |
| 1 500 001 Ft-tól     | 326 000 Ft és a 1 500 000 Ft-on felüli rész 38%-a |

| 2005             |                                                   |
|------------------|---------------------------------------------------|
| 0–1 500 000 Ft   | 18%                                               |
| 1 500 001 Ft-tól | 270 000 Ft és a 1 500 000 Ft-on felüli rész 38%-a |

- a) 2005 elején Szabó apuka így beszélgetett egy barátjával:

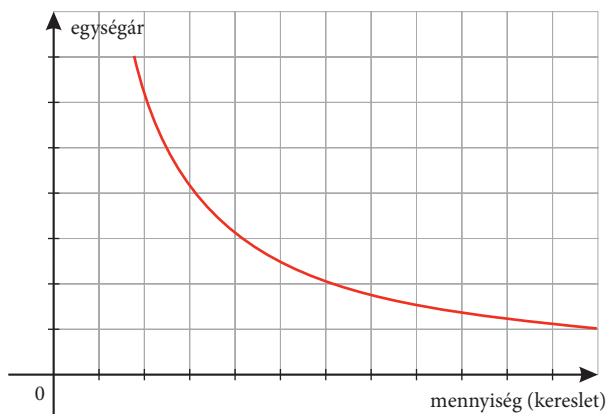
Szabó apuka: „Én jól jártam ezzel a váltással. Évente 1 200 000 forintot keresek, eddig 26%-ot adóztam, most majd csak 18-at fogok, a 8% ennél a fizetésnél 96 000 Ft megtakarítás az év során.”

A barátja: „Én bezzeg jól megjártam! 2004-ben 1 460 000-et kerestem egy évben, 2005-ben 1 520 000-et, ezzel pont átkerültem a 38%-os sávba. Mire levonják az adót, kevesebb marad, mintha nem is emeltek volna.”

Valójában egyiküknek sincs igaza. Számítsd ki, kinek mennyi adót kellett fizetnie 2004-ben, és mennyit 2005-ben!

- b) Ábrázold grafikonon az egyes években a fizetendő adó mennyiségét az éves jövedelem függvényében! Hogyan olvasható le a grafikonról, hogy kik jártak jól a változással?
- c) Magyarázd meg a grafikon alapján, miért nem lehetséges az, hogy valakinek 2005-ben több adót kelljen fizetnie, mint 2004-ben, miközben a jövedelme változatlan maradt!
- d) Mekkora az az éves adóalap, amelynél a változás a legnagyobb különbséget okozta?

- 3 A grafikon egy bizonyos áru fajta egységára és az áru iránti kereslet közötti kapcsolatot szemlélteti.

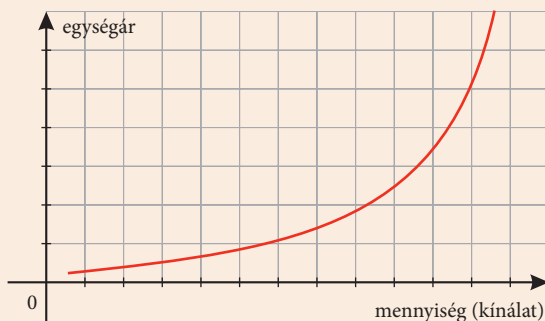


Melyik kijelentés igaz, és melyik hamis? Indokold a válaszaidat!

- a) Ha csökken az áru iránti kereslet, akkor nő a termék ára.
- b) Nagyobb kereslethez alacsonyabb ár tartozik.
- c) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kereslet egyenesen arányos.
- d) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kereslet fordítottan arányos.

### HÁZI FELADAT

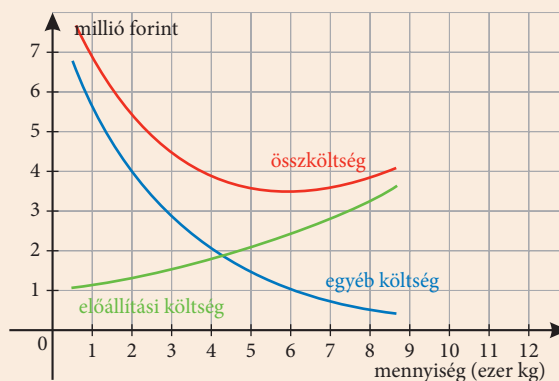
- 1 A grafikon egy bizonyos áru fajta egységára és az áru piaci kínálata közötti kapcsolatot szemlélteti.



Melyik kijelentés igaz, és melyik hamis? Indokold a válaszaidat!

- a) Ha nő a termék ára, akkor nő az áru piacon felkínált mennyisége.
- b) Alacsonyabb árhoz nagyobb kínálat tartozik.
- c) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kínálat egyenesen arányos.
- d) A grafikonon ábrázolt esetben az áru ára és a kínálat fordítottan arányos.
- e) Ha az áruért a fogyasztók magasabb árat is hajlandóak fizetni, akkor a piacon nő a kínálat az adott áruból.

- 2 Egy alapanyagot gyártó cég a gyártás során felmerülő költségeket a gyártott mennyiség függvényében vizsgálja. Az eredményt grafikonon ábrázolják.



- a) Hogyan változik az előállítási költség az előállított mennyiség növekedésével?
- b) Hogyan változik az egyéb költség az előállított mennyiség növekedésével?
- c) Mekkora előállított mennyiség esetén a legacsonyabb az összköltség, és mennyi ez? Mennyi ebben az esetben az előállítási költség, és mennyi az egyéb költség?
- d) Mekkora gyártott mennyiség esetén lesz 4 millió forint az összköltség? Miből tevődik ez össze?

## BEVEZETŐ

Rajzoljunk be a koordináta-rendszer síkjába 10 olyan pontot, amelyek

- a második koordinátája 3-mal nagyobb az elsőnél;
- a második koordinátája az első koordináta abszolút értéke.

Válasszuk első koordinátának a  $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$  számokat! Töltsük ki a táblázatokat!

a)

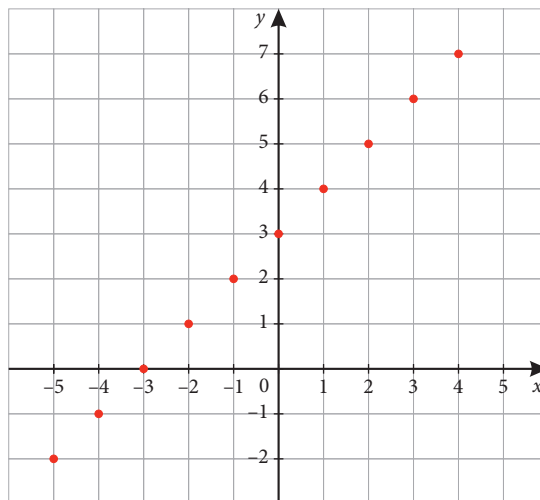
|                            |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|----------------------------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| Első koordináta ( $x$ )    | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Második koordináta ( $y$ ) | -2 | -1 | 0  | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Az alsó sorban lévő számok mind 3-mal nagyobbak a felettük lévő számnál.

A megrajzolt 10 pont egy egyenesre illeszkedik. Ha a pontok első koordinátáját  $x$ -szel, a második koordinátáját  $y$ -nal jelöljük, akkor itt minden pontnál:  $y = x + 3$ .

Azt is szoktuk mondani, hogy a táblázat felső számaihoz (**független változó**hoz) az alattuk lévő számokat (**függő változó**kat) rendeljük hozzá. Ennek a jelölése:

$$x \mapsto x + 3.$$



b)

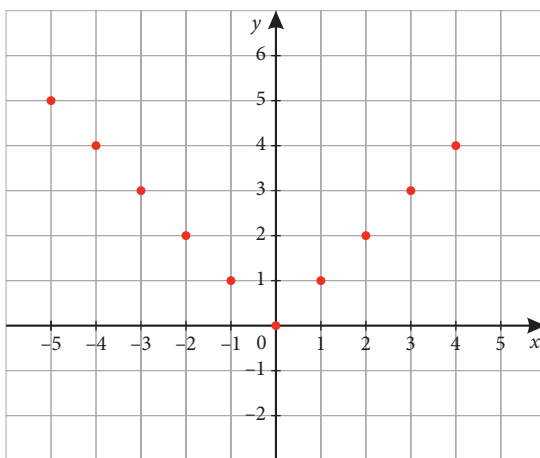
|                            |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |
|----------------------------|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|
| Első koordináta ( $x$ )    | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Második koordináta ( $y$ ) | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

A felső sorban lévő számok alá az *abszolút értéküket* írtuk.

Az ábrán a 10 pont nem esik egy egyenesre. Ha a pontok első koordinátáját  $x$ -szel, a második koordinátáját  $y$ -nal jelöljük, akkor itt minden pontnál  $y = |x|$ .

Azt is szoktuk mondani, hogy a táblázat felső sorában lévő számokhoz az alattuk lévő számokat **rendeljük hozzá**. Ennek a jelölése:

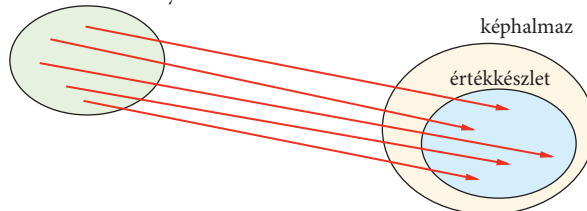
$$x \mapsto |x|.$$



## ELMÉLET

**Definíció:** Adott két nem üres halmaz,  $A$  és  $B$ . Ha  $A$  halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a  $B$  halmaz pontosan egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést **függvénynek** nevezzük. Az  $A$  halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, a  $B$  halmaz a függvény **képhalmaza**. A  $B$  halmaz azon elemeinek halmazát, melyeket hozzárendeltünk valamely értelmezési tartománybeli elemhez, a függvény **értékkészletének** nevezzük.

értelmezési tartomány





A függvényeket gyakran egy-egy betűvel jelöljük.

Egy  $f$ -fel jelölt függvény értelmezési tartományának a jele:  $D_f$ , értékkészletének a jele:  $R_f$ .

Ha egy  $f$ -fel jelölt függvény esetében  $x \in D_f$ , akkor az  $x$ -hez hozzárendelt elemet a függvény  $x$  helyéhez tartozó **helyettesítési értékének** nevezzük, és így jelöljük:  $f(x)$ .

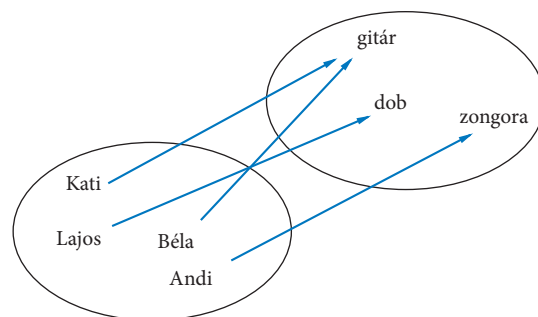
A függvény meghatározásakor meg kell adni az értelmezési tartományát, képhalmazát, és valamilyen formában a hozzárendelést is. Sokszor ezt úgy tesszük, hogy megadjuk a **hozzárendelés szabályát**.

*Például:* Amikor minden egész számhoz az abszolút értékét rendeljük, ezt így írhatjuk:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x| \quad \text{vagy} \quad f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = |x|$$

## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A halmazra egy osztályzenekar összetételét mutatja.
- Mit olvashatunk le az ábráról?
  - Hogyan változna a hozzárendelés, ha Kati zongorázni is tudna?
  - Hogyan változna a hozzárendelés, ha Béla nem játszana az együttesben?



*Megoldás*

- a) Az ábrán egy függvényt adtunk meg. Jelöljük  $f$ -fel! Most  $D_f = \{\text{Kati, Lajos, Béla, Andi}\}$ ,  $R_f = \{\text{zongora, gitár, dob}\}$ .

A nyílak azt mutatják, hogy Andi zongorázik, Kati és Béla gitározik, Lajos pedig dobol.

A kapcsolatokat táblázattal is szemléltethetjük:

| Kati  | Lajos | Béla  | Andi    |
|-------|-------|-------|---------|
| gitár | dob   | gitár | zongora |

Helyettesítési értékekkel leírva:  $f(\text{Kati}) = \text{gitár}$ ;  $f(\text{Lajos}) = \text{dob}$ ;  $f(\text{Béla}) = \text{gitár}$ ;  $f(\text{Andi}) = \text{zongora}$ .

Itt a **függvényt megadhatjuk** szavakkal, halmazábrával, a helyettesítési értékekkel vagy táblázattal is. Grafikont természetesen nem készíthetünk, mert nem számokról van szó.

- b) Ebben az esetben nem beszélhetünk függvényről, mert Katihoz két értéket (gitár, zongora) rendelünk, vagyis nem egyértelmű a hozzárendelés. A függvény minden esetben **egyértelmű hozzárendelés**, azaz egy értelmezési tartománybeli elemhez **egyetlen** képhalmazbeli elem tartozhat.
- c) Azért érdekes ez az eset, mert ekkor minden hangszerről el tudjuk dönteni, hogy ki játszik rajta. Visszafelé is egyértelmű a kapcsolat, azaz függvény lenne az a hozzárendelés is, ha a hangszerhez rendeljük hozzá, hogy ki játszik rajta. A mindkét irányban egyértelmű hozzárendeléseket **kölcsönösen egyértelmű** hozzárendelésnek nevezzük.

Mondj te is példát a hétköznapi életből vagy más tudományterületről nem egyértelmű, egyértelmű valamint kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésre!

2. Egy függvény minden

- egész számhoz;
  - valós számhoz
- a nála 3-mal kisebb szám abszolút értékét rendeli hozzá.

Mi az értelmezési tartományuk és értékkészletük?

Add meg a hozzárendelési szabályukat!

Ábrázold a függvényeket koordináta-rendszerben!

Megoldás

a)  $D_f = \mathbf{Z}$ ;  $R_f = \mathbf{N}$ ;  $x \mapsto |x - 3|$

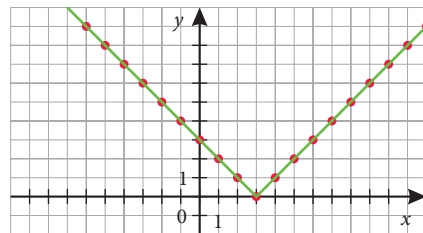
b)  $D_g = \mathbf{R}$ ;  $R_g = \mathbf{R}_0^+$  (így jelöljük a nemnegatív valós számokat);  $x \mapsto |x - 3|$

Az első  $f$  függvény helyettesítési értéke például a 3 helyen  $f(5) = |5 - 3| = 2$ .

A második függvény helyettesítési értéke például a  $-2,4$  helyen

$$g(-2,4) = |-2,4 - 3| = 5,4.$$

Az  $f$  függvény grafikonjának pontjait a piros pontok, a  $g$  függvény grafikonját a zöld vonal mutatja.



## ELMÉLET

### Megállapodás

Ha egy függvény értelmezési tartománya a **valós számok halmaza** ( $\mathbf{R}$ ), azt nem kötelező kiírni. Ha tehát egy függvény megadásakor csak a hozzárendelési szabályt látjuk, akkor ennek a függvénynek az értelmezési tartománya  $\mathbf{R}$ .

## FELADAT

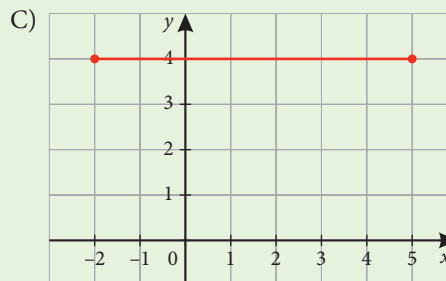
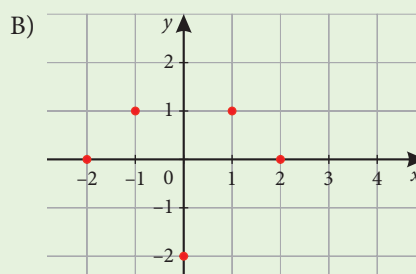
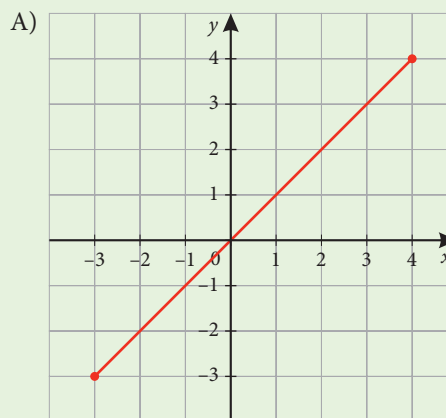
1. Táblázatba foglaljuk, mennyibe kerül 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg, 7 kg, 8 kg, 9 kg, 10 kg savanyú káposzta:

|             |   |   |     |   |    |
|-------------|---|---|-----|---|----|
| Tömeg (kg)  | 1 | 2 | 3   | 4 | 5  |
| Ár (forint) |   |   | 390 |   |    |
| Tömeg (kg)  | 6 | 7 | 8   | 9 | 10 |
| Ár (forint) |   |   |     |   |    |

- Készítsd el a táblázatot a füzetedben, és töltsd ki!
- Ezzel a táblázattal megadtunk egy függvényt. Mi ennek az értelmezési tartománya, mi az értékkészlete?
- Készíts a táblázat alapján grafikon!

2. Az alábbi grafikonok ismeretében válaszolj a kérdésekre!

- Melyik függvénynek mi az értelmezési tartománya?
- Melyik függvénynek mi az értékkészlete?
- Melyik függvénynek lehet képhalmaza a pozitív számok halmaza?
- Melyik függvénynek lehet képhalmaza az egész számok halmaza?
- Készíts táblázatot és halmazábrát a B) grafikon alapján!



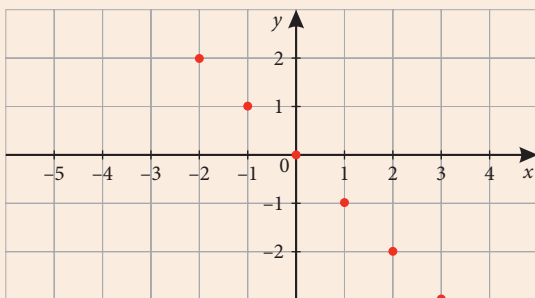
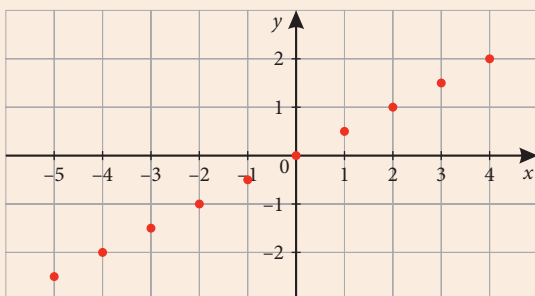
3. Kerékpárral állandó sebességgel tekersz.

- Töltsd ki a táblázatot arról, mennyi időre van szükséged az egyes távolságok megtételéhez! A füzetedben dolgozz!
- Ezzel a táblázattal megadtunk egy függvényt. Mi ennek az értelmezési tartománya, mi az értékkészlete?
- Készíts a táblázat alapján grafikont!

| Távolság (m) | 100 | 150 | 250 | 350 | 400 | 500 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Idő (s)      |     |     |     | 70  |     |     |

## HÁZI FELADAT

1. Add meg táblázattal is mindkét függvényt! Add meg a hozzárendelési szabályokat!



2. Az  $f$ -fel jelölt függvény grafikonja 5 pontból áll. A pontok:  $(-4; 1)$ ,  $(5; 1)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(-2; 1)$ .

- Rajzold meg a függvény grafikonját!
- Add meg a  $D_f$  és az  $R_f$  halmazt!
- Mennyi  $f(5)$ , és mennyi  $f(1)$ ?

d) Melyik számhoz tartozik az 1, és melyikhez a  $-1$  helyettesítési érték?

3. Foglald táblázatba, hány különböző módon lehet sorba állítani  $x$  tanulót, ha  $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ! Mi az értékkészlete a táblázattal megadott függvénynek?

4. A  $g$ -vel jelölt függvény értelmezési tartománya a  $D_g = \{4; 2; 0; -4; -6\}$  halmaz, hozzárendelési szabálya:  $x \mapsto 3 - \frac{x}{2}$ .

a) Töltsd ki a táblázatot a füzetedben!

| Értelmezési tartomány                   | 4 | 2 | 0 | -4 | -6 |
|-----------------------------------------|---|---|---|----|----|
| Helyettesítési érték                    |   |   | 3 |    |    |
| Megfelelő pont a koordináta-rendszerben |   |   |   |    |    |

- Rajzold meg a függvény grafikonját!
- Add meg az  $R_g$  halmazt!

5. András és Bence kedvenc szabadidős elfoglaltsága a zenehallgatás, Réka a számítógépes játékokkal szeret legjobban játszani, Nóra könyveket olvas, Erzs pedig úszni szeret. Ábrázold halmazábrával azt a függvényt, amely mindenkihez a kedvenc szabadidős elfoglaltságát rendeli hozzá! Add meg a függvényt táblázattal is!

## RÁADÁS

- Az  $A$  halmaznak 8 eleme van, a  $B$  halmaznak 6. Hány különböző függvény készíthető, amelynek
  - értelmezési tartománya  $A$ , képhalmaza  $B$ ;
  - értelmezési tartománya  $B$ , képhalmaza  $A$ ?
- Az  $x$  valós szám egészrészének hívjuk azt az egész számot, amely a nála nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb. Jelölése:  $[x]$ . Például 4,2 egészrésze 4, illetve 13 egészrésze 13, vagyis  $[4,2] = 4$ ,  $[13] = 13$ . Negatív számok esetén azonban óvatossá kell lenni:  $-1,6$  egészrésze nem  $-1$ , mert az egészrész nem lehet nagyobb, mint a szám.  $-1,6$  egészrésze  $-2$ , vagyis  $[-1,6] = -2$ .  
Ábrázold a derékszögű koordináta-rendszerben azt a függvényt, mely minden valós  $x$ -hez hozzárendeli az egészrészét! ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = [x]$ )

## KIDOLGOZOTT FELADAT

Egy hosszú és unalmas autóbuszos utazás során Gyula azt számolgatta, hogy milyen gyorsan mehet a busz. Egyszerre figyelve az órája másodpercmutatóját és az út mentén feltűnő kilométertáblákat felírogatta az összetartozó értékpárokat, és ebből próbálta megállapítani a busz sebességét. Néhány kilométertáblánál elbambult, így csak a következő adatokat jegyezte fel.

| Km-tábla | Megtett út (km) | Idő (mp) |
|----------|-----------------|----------|
| 85       | 0               | 0        |
| 87       | 2               | 120      |
| 90       | 5               | 303      |
| 91       | 6               | 360      |
| 93       | 8               | 481      |

A táblázatból azt vette észre, hogy érdemes másodpercről percekre kerekíteni, ezzel nem veszít semmit az amúgy is kétséges pontosságból. Az így nyert eredményeket egy grafikonon ábrázolta. A pontok egy egyenesre esnek, ebből arra következtetett, hogy a busz egyenletes tempóban (állandó nagyságú sebességgel) haladt, az eltelt idő és a megtett út egyenes arányos.

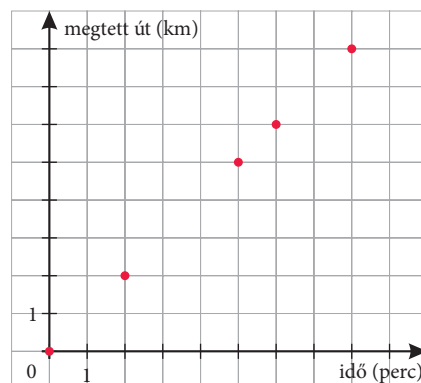
- Mi az összefüggés az eltelt idő és a megtett kilométerek száma között?
- Hogyan változik meg a grafikon, ha Gyula nem a megtett utat, hanem a kilométertáblán lévő számot ábrázolja az eltelt percek függvényében? Add meg most is az összefüggést a kilométertáblán lévő számok és az eltelt idő között!
- Bár pontosan nem tudta leolvasni, Gyula elgondolkozott azon, hol metszheti a pontokra illeszthető egyenes az  $x$  tengelyt.

## Megoldás

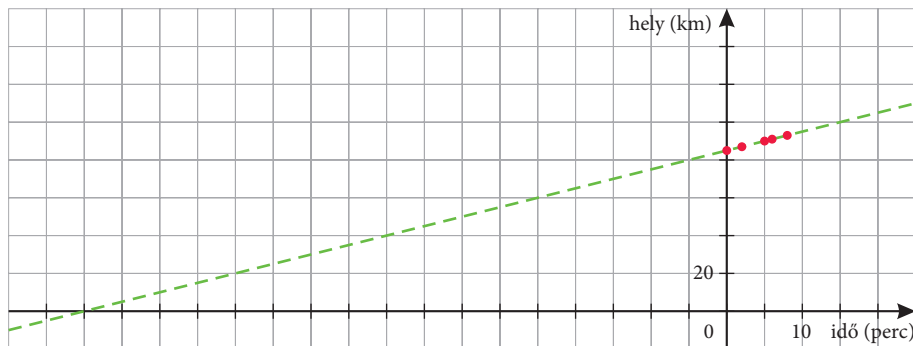
- A táblázat első két sora alapján hamar megkapta, hogy a busz 2 km-t 120 másodperc, azaz 2 perc alatt tett meg, tehát percenként nagyjából egy kilométert haladt. (Azt is megállapította, hogy a táblázat másik két sorát vizsgálva ugyanerre az eredményre jut.)

Kilométerek száma = percek száma.

Ha az eltelt percek számát  $x$ -szel jelöljük, a megtett kilométerek számát pedig  $y$ -nal, akkor  $y = x$ . A busz sebessége pedig  $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , hiszen egy óra, azaz 60 perc alatt 60 km-t tesz meg.



- Gyula sehogy sem tudott átlátható grafikont készíteni, de azt észrevette, hogy az előző egyenest 85 egységgel feljebb kellett tolni, azaz 85-nél metszi az  $y$  tengelyt. Ha az eltelt percek számát továbbra is  $x$ -szel jelöljük,  $y$ -nal a pedig kilométertáblán szereplő számokat, akkor:  $y = x + 85$ .



- Rájött, hogy ez a pont a 0 kilométertáblának felel meg. Ha a busz korábban is ugyanezzel az állandó nagyságú sebességgel haladt volna, akkor a 0 kilométertábla mellett 85 perccel korábban haladt volna el. Az imént ábrázolt egyenes tehát az  $x$  tengelyt a  $-85$ -nél metszi.

## ELMÉLET

**Definíció:** Egy  $f$  függvény értelmezési tartományának azon elemeit, amelyekhez a függvény a 0-t rendeli (azaz  $f(x) = 0$ ) az  $f$  függvény **zérushelyeinek** nevezzük.

## FELADAT

**1.** Az, hogy egy fazék víz mennyi idő alatt forr fel a tűzhelyen, alapvetően a víz mennyiségétől függ. Megmértük, hogy különböző nagyságú fazekakat megtöltve meddig tart felforralni a bennük lévő vizet az otthoni gáztűzhelyen. Az adatokat a táblázat mutatja.

| Vízmenyiség (liter) | Idő (perc) |
|---------------------|------------|
| 0,2                 | 2          |
| 1                   | 10         |
| 2,5                 | 24         |
| 3                   | 29         |
| 9,8                 | 102        |

- Készítsünk grafikont a táblázat alapján!
- Körülbelül mennyi vizet lehet felforralni ezen a tűzhelyen 1 perc alatt?
- Írjunk fel összefüggést a víz mennyisége és a felforraláshoz szükséges idő között!
- Körülbelül mennyi ideig tartana ezen a tűzhelyen felforralni 1,5 liter vizet?
- Maximum mennyi vizet szabad a fazékba tölteni, ha 15 perc alatt fel kell forralnunk?

**2.** Egy taxi utasa időnként a taxiórára pillantva a következő számokat látta a kijelzőn:

| km | Viteldíj (Ft) |
|----|---------------|
| 3  | 1020          |
| 6  | 1740          |
| 8  | 2220          |
| 11 | 2940          |

- Ábrázoljuk az összetartozó értékeket koordináta-rendszerben, és keressük meg azt az egyenest, amelyre ezek a pontok mind illeszkednek!
- Hol metszi az egyenes az  $y$  tengelyt? Mit fejez ki ez az érték?
- Mi a kapott függvény zérushelye?

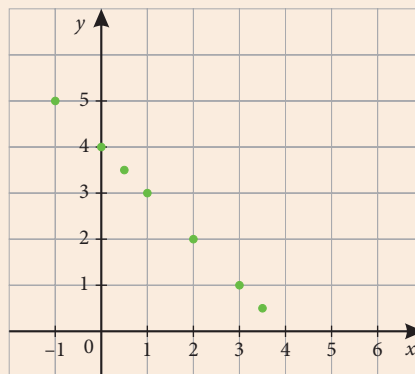
## HÁZI FELADAT

**1.** Egy grafikon pontjait táblázattal adtuk meg. Rajzold meg derékszögű koordináta-rendszerben a pontokat, és keress kapcsolatot/összefüggést a grafikon pontjainak első ( $x$ ) és második ( $y$ ) koordinátái között!

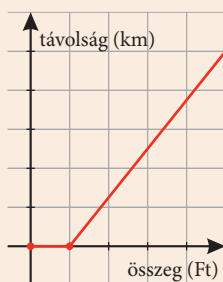
| Pont neve                    | A  | B | C | D |
|------------------------------|----|---|---|---|
| Első ( $x$ ) koordinátája    | -2 | 0 | 1 | 4 |
| Második ( $y$ ) koordinátája | 0  | 2 | 3 | 6 |

**2.** Válaszd ki, a felsoroltak közül melyik képlettel jellemezhetjük a grafikon pontjait! Ha segít, foglald táblázatba a pontok koordinátáit! Vigyázz, több megoldás van!

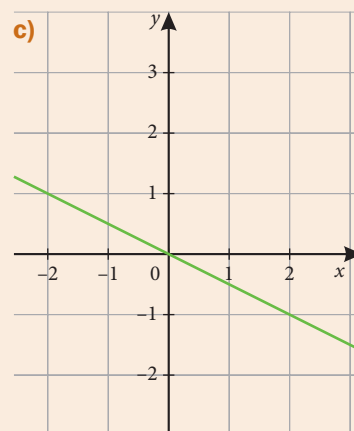
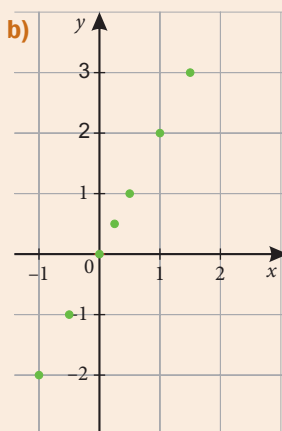
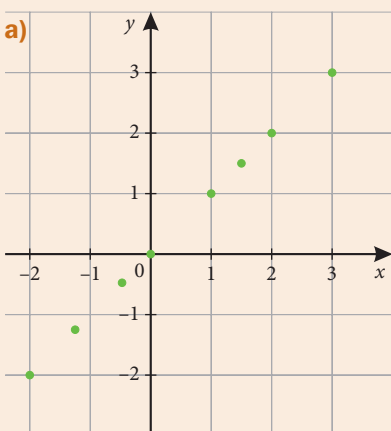
- $y = 4x$
- $x = y - 4$
- $y = 4 - x$
- $y = |x - 4|$
- $x = |y - 4|$
- $5 - y = |x + 1|$



3. A 2. feladatban szereplő díjszabáshoz olyan grafikonvázlatot készítettünk, amelyik azt mutatja meg, hogy egy bizonyos összegből hány km-t utazhatunk taxival. Válaszd ki a megfelelő grafikont! Választásodat indokold!



4. Keress kapcsolatot/összefüggést a grafikon pontjainak első ( $x$ ) és második ( $y$ ) koordinátái között!



## RÁADÁS

A természettudományokban gyakran nevezik a grafikont görbének, még akkor is, ha az egyenes. Most mutatunk néhány példát, amikor a grafikon valóban egy görbe vonal.

1. Nedves, csúszós úton különösen fontos a gépkocsi sebességének mérséklése, hiszen ilyenkor a gumikerekek kevésbé tapadnak az aszfalton. A táblázat azt mutatja, hogy ilyen körülmények között, különböző sebességek mellett körülbelül milyen hosszú lesz a fékút állóra fékezett – blokkolt – kerekekkel.

| Sebesség (km/h) | Fékút (m) |
|-----------------|-----------|
| 30              | 9         |
| 40              | 16        |
| 50              | 25        |
| 60              | 36        |
| 70              | 49        |
| 80              | 64        |

Milyen összefüggés áll fenn a sebesség és a fékút között? Ábrázoljuk az adatokat grafikonon!

(Figyelem! Ez csak a fékezés utolsó szakasza! A biztonságos megálláshoz ennél hosszabb út kell, hiszen a kocsi azalatt is halad, amíg észleljük az akadályt és benyomjuk a fékpedált! Ezt a hosszabb utat nevezzük féktávolságnak.)





### Megoldás

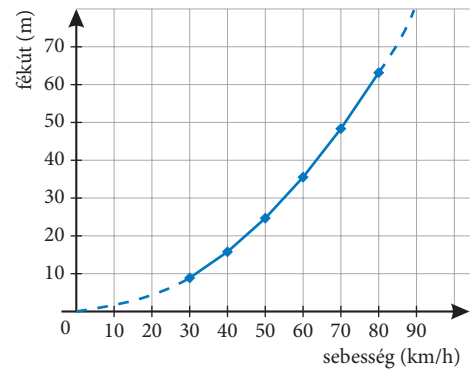
A grafikonon jól látható, hogy ez az összefüggés nem lineáris, azonban még így sem különösebben nehéz kitalálni:

$$\text{Fékút} = \left( \frac{\text{Sebesség}}{10} \right)^2, \text{ vagy } \text{Fékút} = \frac{\text{Sebesség}^2}{100},$$

ahol a fékutat méterben, a sebességet pedig km/h-ban mérjük.

Ha a sebességet  $v$ -vel, a fékutat  $s$ -sel jelöljük, akkor

$$s = \left( \frac{v}{10} \right)^2 \text{ vagy } s = \frac{v^2}{100}.$$

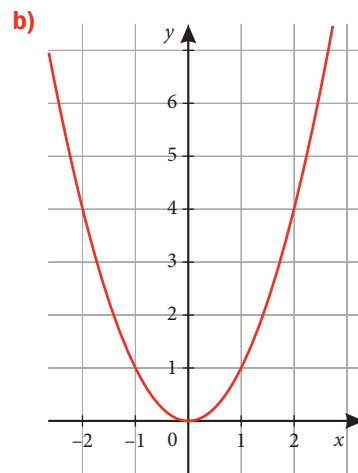
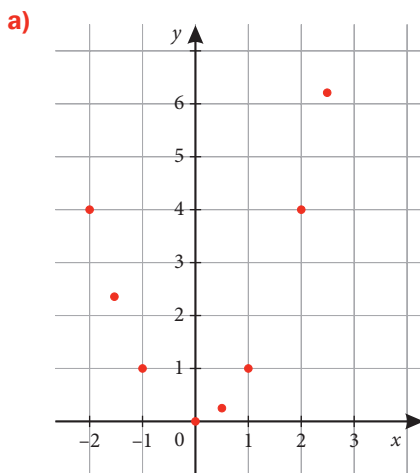


- 2.** Egy nemzetközi telefonhívásokra specializálódott vállalkozás reklámjában az USA-ból Magyarországra irányuló hívásdíjakra a következő táblázatot találtuk:

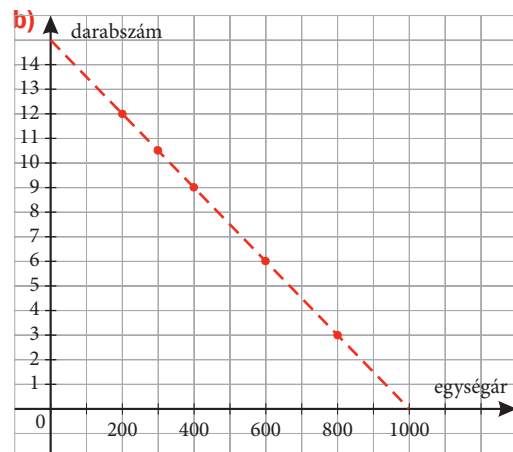
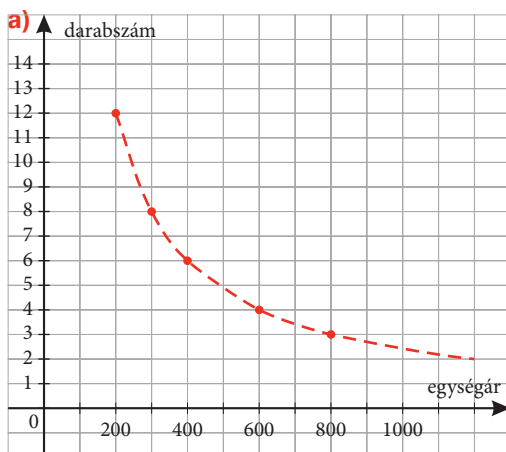
| Beszélgetési idő (perc) | Díj (\$) |
|-------------------------|----------|
| 2                       | 1,70     |
| 5                       | 2,00     |
| 9                       | 2,40     |
| 14                      | 2,90     |
| 22                      | 3,70     |

- a) Ábrázold az adatokat grafikonon!  
 b) Írd fel azt a képletet, amely megadja a fizetendő összeg nagyságát a beszélgetési idő függvényében!  
 c) Mennyibe kerülne egy hétperces beszélgetés?  
 d) Mennyi ideig lehetne három dollárért beszélgetni?

- 3.** Keress kapcsolatot/összefüggést a grafikon pontjainak első ( $x$ ) és második ( $y$ ) koordinátái között!



- 4.** Bence írható DVD-lemezt szeretne venni, erre van 2400 Ft-ja. A közeli üzletben ötféle lemezt lehet kapni, ezek egységára 200 Ft, 300 Ft, 400 Ft, 600 Ft és 800 Ft. Melyik grafikon szemlélteti Bence lehetséges választásait, ha csak az egyik fajtából vásárol, és mind a 2400 forintját elkölti?



## KIDOLGOZOTT FELADAT

- 1.** Magyarországon a gépkocsik üzemanyag-fogyasztását legtöbbször liter/100 km-ben adják meg. Az egyes autók fogyasztása így könnyen összehasonlítható. Az üzemben tartás költségének kiszámításánál ez fontos tényező. Tapasztalataink alapján kijelenthetjük, hogy – állandó fogyasztást feltételezve – kétszer akkora hosszúságú úton kétszer annyi üzemanyag fogy, háromszor akkora hosszúságú úton háromszor annyi stb. Ez azt jelenti, hogy az elhasznált üzemanyag-mennyiség és a megtett út **egyenesen arányos**, hányadosuk állandó. Ez a hányados az arányossági tényező. (Emlékeztető: Ha két változó mennyiség összetartozó értékeinek a hányadosa [aránya] állandó, akkor a két mennyiség között egyenes arányosság van.)

Vizsgáljuk táblázattal, képlettel és grafikonnal egy 6 liter/100 km jellemzőjű gépkocsi üzemanyag-fogyasztását!

*Megoldás*

Táblázattal:

|                                      |     |   |    |    |
|--------------------------------------|-----|---|----|----|
| Megtett út (100 km) ( $x$ )          | 0,5 | 1 | 2  | 3  |
| Üzemanyag-fogyasztás (liter) ( $y$ ) | 3   | 6 | 12 | 18 |

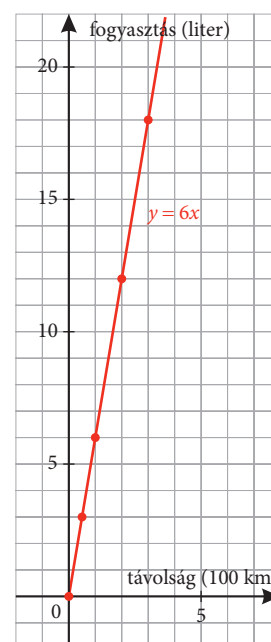
Képlettel:

$y = 6x$ , ahol  $x$  jelöli a megtett út hosszát 100 km-ekben mérve,  $y$  pedig az  $x$ -hez tartozó, literben mért üzemanyag-mennyiséget.

Az  $y = 6x$  egyenlet átírható  $\frac{y}{x} = 6$  alakba is. Itt olyan egyenes arányosságról van szó, amelynek arányossági tényezője 6.

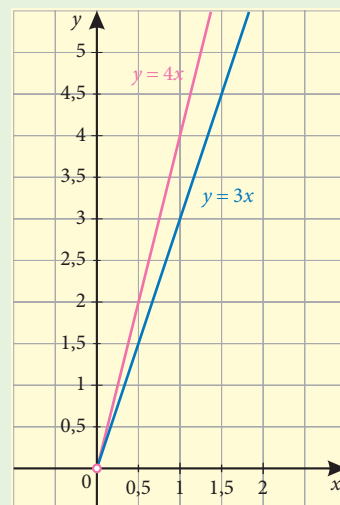
A grafikont olyan pontok alkotják, amelyeknek második koordinátája a pont első koordinátájának éppen a 6-szorosa. Az ilyen tulajdonságú pontok egy *origón átmenő egyenesre* illeszkednek. Mivel a megtett út csak nemnegatív szám lehet, ezért a grafikon egy origó kezdőpontú félegyenes.

Ez a félegyenes az  $x \mapsto 6x$  ( $x \geq 0$ ) függvény grafikonja.



## FELADAT

1. A kék félegyenes azt szemlélteti, hány cm az  $x$  cm oldalú szabályos háromszög kerülete, a rózsaszínű félegyenes pedig azt, hogy hány cm az  $x$  cm oldalú négyzet kerülete. Olvasd le a grafikonról,
- mekkora az  $x$ , ha az  $x$  cm-es oldalú négyzet és háromszög kerületének a különbsége 1 cm;
  - mennyivel nagyobb a háromszög oldala, mint a négyzeté, ha mindkettőnek 4 cm a kerülete;
  - mit jelent az, hogy a  $(0,5; 1,5)$  pont rajta van a kék félegyenesen;
  - mit jelent az, hogy a  $(0,5; 2)$  pont rajta van a rózsaszínű félegyenesen!
2. Az ábrán lévő mindkét félegyenes egy-egy függvény grafikonja. Mindkét függvény egyenes arányosságot ír le. Mi ennek a két függvénynek az értelmezési tartománya és az értékkészlete?



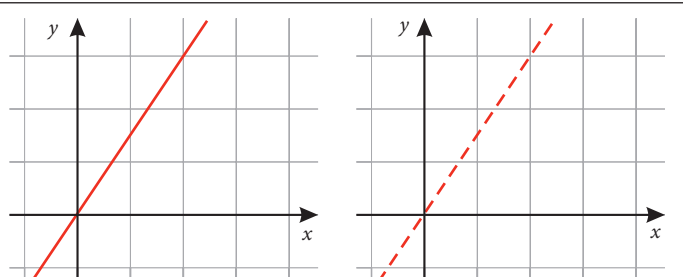
## ELMÉLET

Ha egy függvény értelmezési tartománya valós számokból áll, és a hozzárendelési szabálya  $x \mapsto ax$  alakba írható ( $a$  adott valós szám, de  $a \neq 0$ ), akkor ez a függvény egyenes arányosságot ír le.

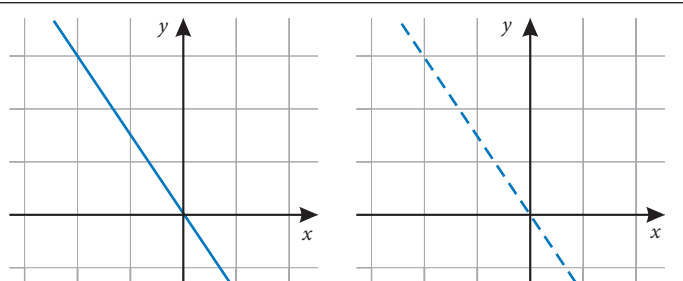
Ha az egyenes arányosságot leíró függvény értelmezési tartománya az  $\mathbf{R}$  halmaz, akkor értékkészlete is az  $\mathbf{R}$  halmaz, grafikonja pedig egy az origón átmenő egyenes.

Ha  $a > 0$ , akkor  $f$  **szigorúan monoton növekedő**, a grafikonját alkotó pontok egy „emelkedő” egyenesen helyezkednek el.

(Az egyenes arányosságot leíró függvény értelmezési tartománya a valós számok halmazának részhalmaza, ezért a grafikonja nem feltétlenül egy teljes egyenes. Ezt szemlélteti a két ábra.)



Ha  $a < 0$ , akkor  $f$  **szigorúan monoton fogyó**, a grafikonját alkotó pontok egy „süllyedő” egyenesen helyezkednek el.



**Definíció:** Egy  $f$  függvény **szigorúan monoton növekedő** az értelmezési tartományának egy intervallumán, ha az intervallum bármely két elemére teljesül, hogy a nagyobb elemhez nagyobb függvényérték tartozik:  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Definíció:** Egy  $f$  függvény **szigorúan monoton csökkenő (fogyó)** az értelmezési tartományának egy intervallumán, ha az intervallum bármely két elemére teljesül, hogy a nagyobb elemhez kisebb függvényérték tartozik:  $x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Ha a függvényértékek között az egyenlőség is fennállhat, akkor **monoton növekedő**, illetve **monoton csökkenő** függvényekről beszélünk.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

2. Az Egyesült Államokban máshogy számítják ki, mennyit fogyaszt egy autó. Ott az 1 gallon (1 USA gallon = kb. 3,8 liter) üzemanyaggal megtehető mérföldek számát adják meg (1 mérföld = kb. 1,6 km).

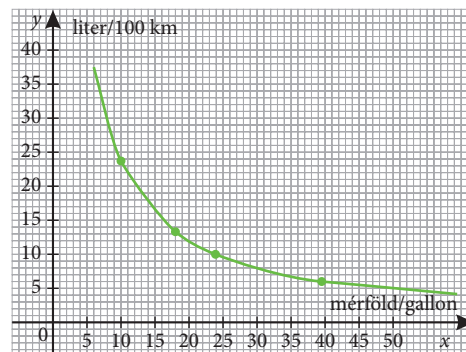
Az alábbi táblázat néhány tipikus értékre vonatkoztatva megmutatja, hogy minek felel meg liter/100 km-ben mérve a mérföld/gallonban megadott fogyasztásérték:

|                                                                 |      |                           |                                           |      |                                           |
|-----------------------------------------------------------------|------|---------------------------|-------------------------------------------|------|-------------------------------------------|
| Fogyasztás $\frac{\text{mértföld}}{\text{gallon}}$ -ban ( $x$ ) | 10   | 15<br>(SUV<br>terepjárók) | 18<br>(nagyobb amerikai<br>városi kocsik) | 23,7 | 39,5<br>(kisebb európai<br>városi kocsik) |
| Fogyasztás $\frac{\text{liter}}{100 \text{ km}}$ -ben ( $y$ )   | 23,7 | 15,8                      | 13,17                                     | 10   | 6                                         |

Grafikonon ábrázolva:

A táblázatból (különösen az első és az utolsó előtti oszlopból) arra következtethetünk, hogy itt az összetartozó értékpárok *szorzata* állandó, mindig 237. A két mennyiség között tehát **fordított arányosság** van, az arányossági tényező 237.

A grafikon olyan pontok alkotják, amelyeknek első ( $x$ ) és második ( $y$ ) koordinátája között az  $x \cdot y = 237$  összefüggés áll fenn.

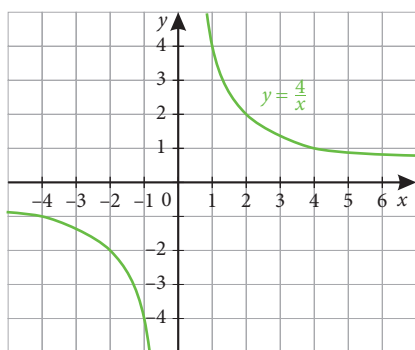


## ELMÉLET

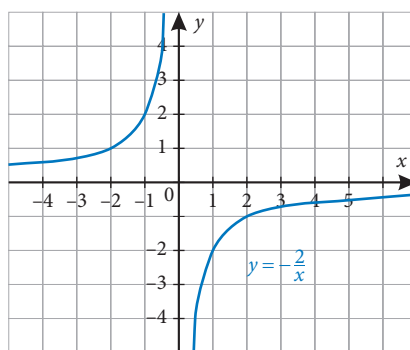
Ha egy függvény értelmezési tartománya 0-tól különböző valós számokból áll, és a hozzárendelési szabálya  $x \mapsto \frac{a}{x}$  alakba írható ( $a$  valós szám, de  $a \neq 0$ ), akkor ez a függvény **fordított arányosságot** ír le.

Ha a fordított arányosságot leíró függvény értelmezési tartománya  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ , akkor az értékkészlete is az  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$  halmaz, grafikonja pedig egy hiperbola.

Például



(az összetartozó értékek szorzata 4)



(az összetartozó értékek szorzata -2)

## FELADAT

3. Ábrázold az

a)  $x \mapsto \frac{1}{x}$ ;

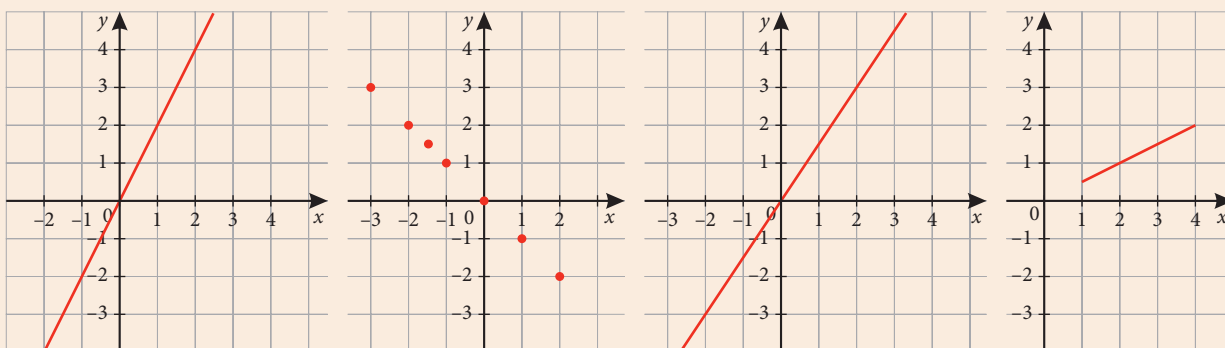
b)  $x \mapsto \frac{6}{x}$ ;

c)  $x \mapsto -\frac{4}{x}$

fordított arányosságot leíró függvények grafikonját, ha az értelmezési tartomány mindegyik esetben  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ !

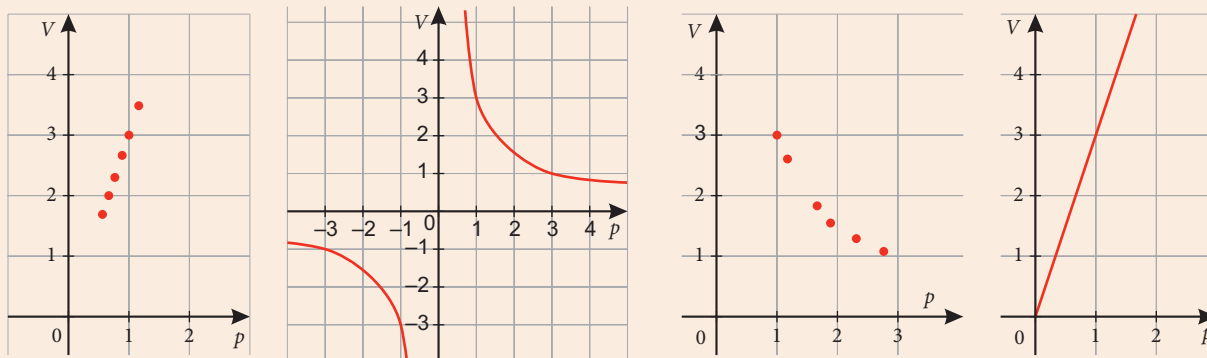
## HÁZI FELADAT

**1.** Mennyi az ábrázolt egyenes arányosságot leíró függvények esetén az arányossági tényező?



**2.** Fizikaórán Bence egy elzárt levegőbuborék térfogatának ( $V$ ) és a buborékban lévő levegő nyomásának ( $p$ ) kapcsolatát vizsgálta. Azt tapasztalta, hogy az összetartozó térfogat- és nyomásértékek szorzata nagyon jó közelítéssel minden esetben 3 lett (a mértékegységeket Bence nem jegyezte fel).

- a) Van-e egyenes vagy fordított arányosság az elzárt levegő nyomása és térfogata között?  
b) Melyik grafikont mellékelhette Bence a kísérletről írt jegyzőkönyvéhez?



**3.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben azokat az egyenes, illetve fordított arányosságokat leíró függvényeket, amelyeknek értelmezési tartománya a  $]0; 4]$  intervallum, hozzárendelési szabályuk pedig  $x \mapsto \frac{1}{4}x$ ;  $x \mapsto -\frac{3}{2}x$ ;  $x \mapsto -\frac{3}{x}$ ;  $x \mapsto \frac{1}{2x}$ !



Ellenőrizd a *Graph* program segítségével, hogy jók-e a grafikonjaid!

## RÁADÁS

Egy álló helyzetből induló test sebessége 2 másodpercen át egyenes arányosság szerint nő  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességig, majd fordított arányosság szerint csökkenni kezd. Ábrázold grafikonon a sebességet az idő függvényében! Fogalmazd meg, mit olvashatsz le a test mozgásáról a grafikon alapján! Jellemezd a grafikont a monotonitás szempontjából! Melyik pillanatokra igaz, hogy a test sebessége  $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ?

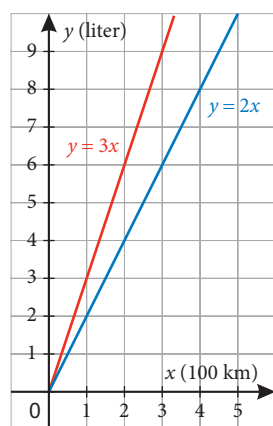


## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy robogó üzemanyag-fogyasztása 2 liter/100 km, egy nagyobb motorkerékpáré pedig 3 liter/100 km. Ábrázoljuk a két jármű által felhasznált üzemanyag mennyiségét a megtett út függvényében! (A távolságot 100 km-es egységekben, az elfogyasztott üzemanyag mennyiségét literben fejezzük ki!)



Megoldás



A fogyasztást az  $x \mapsto 2x$  és az  $x \mapsto 3x$  ( $x \geq 0$ ) egyenes arányosságot leíró függvények jellemzik, grafikonjuk egyenlete tehát  $y = 2x$ , illetve  $y = 3x$ .

Mindkét függvény grafikonja félegyenes. Azt mondjuk, hogy az  $y = 3x$  egyenletű egyenes **meredeksége** 3, az  $y = 2x$  egyenletű egyenes **meredeksége** pedig 2.

A nagy motorkerékpár grafikonjának egyenese *meredekebben emelkedik*, mint a robogóé.

## FELADAT

1. 📡 Három izzó energiafogyasztását vizsgálták. Az egyik izzó másodpercenként 0,5 joule energiát fogyaszt, a második 1 joule energiát, a harmadik 1,5 joule energiát, és feltételezhető, hogy az energiafogyasztásuk egyenesen arányos az idővel.
- Ábrázold közös koordináta-rendszerben az izzók energiafogyasztását az idő függvényében!
  - Írd fel a grafikonok egyenletét!
  - Mekkora a grafikonok egyenesének meredeksége?



## KIDOLGOZOTT FELADAT

2. A két ábrán egyenes arányosságokat leíró függvényeket ábrázoltunk. A bal oldali ábrán látható piros (a) egyenes meredeksége 2, a kék (b) egyenesé pedig  $-\frac{3}{2}$ .

Adjuk meg a jobb oldali ábra c, d, e egyeneseinek meredekségét!

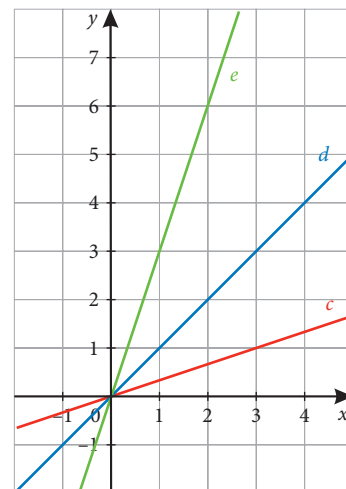
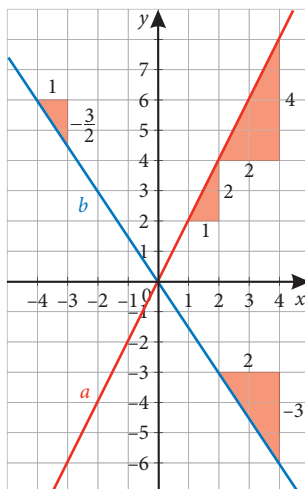
### Megoldás

Mit mutat egy **egyenes meredeksége**? Azt, hogy ha az egyenes valamelyik pontjából 1 egységet megyünk az x tengellyel párhuzamosan, pozitív irányba, akkor mennyit kell mennünk az y tengellyel párhuzamosan, hogy újra az egyenes egy pontjához jussunk.

A jobb oldali ábrán a kék (d) egyenes meredeksége 1, a zöld egyenes (e) meredeksége 3.

A piros (c) egyenesnél a (3; 1) pont is és az origó is rajta van a piros egyenesen, tehát 3 egység „jobbra” haladáshoz 1 egység „emelkedés” tartozik. Ez úgy lehetséges, hogy valójában 1 egység „jobbra” haladáshoz  $\frac{1}{3}$  egység „emelkedés” tartozik. Tehát a piros egyenes meredeksége  $\frac{1}{3}$ .

Ha egy egyenes egy függvény grafikonja, akkor meredeksége m, ha a változó (x) értékét 1-gyel növelve a függvényérték m-mel változik.

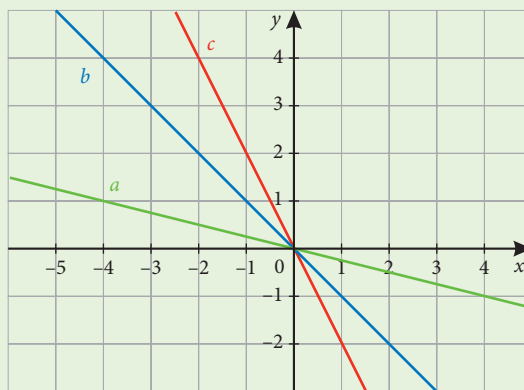


## FELADAT

2. a) Add meg az ábrán látható három egyenes meredekségét!
- b) A három egyenes mindegyike egy-egy függvény képe. Melyik függvény hozzárendelési szabályát találod meg az alábbiak között? Párosítsd a függvények betűjeleit a megfelelő hozzárendelési szabályhoz!

$$x \mapsto -x; \quad x \mapsto -\frac{1}{2}x; \quad x \mapsto -\frac{1}{4}x; \quad x \mapsto \frac{1}{4}x; \quad x \mapsto -2x$$

- c) Told el a három egyenest az y tengely mentén 3 egységgel, pozitív irányba! Változik-e az egyenesek meredeksége az eltolás következtében? Fel tudod írni az eltolással kapott függvények hozzárendelési szabályát?

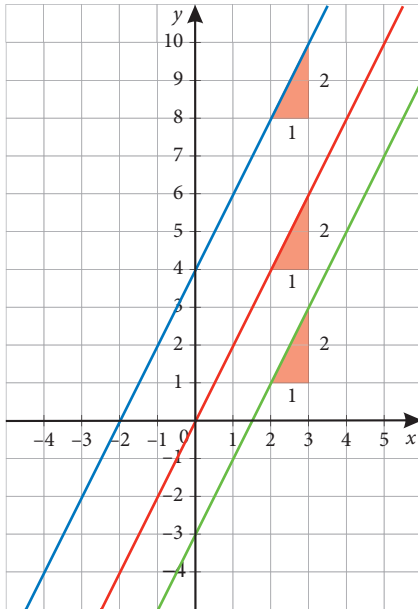


Két egyenes meredekségét összehasonlítva könnyen látható, hogy az egyenesek párhuzamosak-e vagy sem.

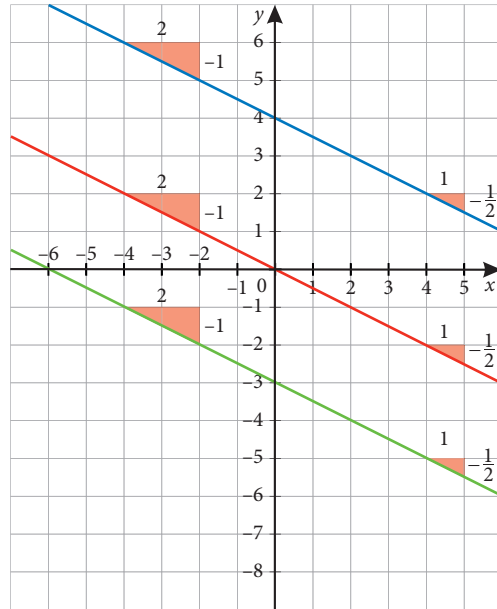
Ha **két egyenes párhuzamos**, akkor a két egyenes **meredeksége egyenlő**.

Az előbbi állítás megfordítása is igaz.

Ha két egyenes **meredeksége egyenlő**, akkor a két egyenes **párhuzamos**.



2 meredekségű egyenesek



$-\frac{1}{2}$  meredekségű egyenesek



A meredekség jelentését vizsgálhatod GeoGebra programmal is.

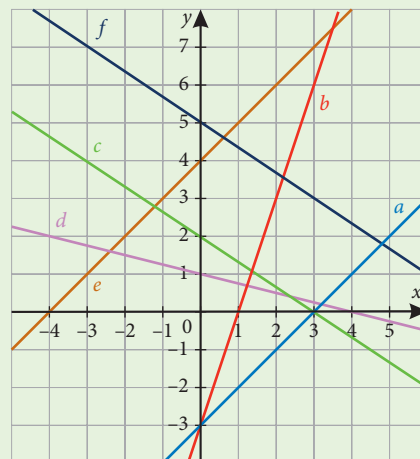
FELADAT

3. Állapítsd meg az ábrázolt egyenesek meredekségét!

- a) Vannak-e az egyenesek között párhuzamosok?
- b) Melyik egyenes meredeksége a negatív?
- c) Melyik egyenes meredeksége a legkisebb?

4. a) Egy egyenes áthalad a (3; 1) ponton és az (5; 4) ponton is. Rajzold meg ezt az egyenest, és számold ki a meredekségét!

- b) Egy egyenes áthalad a (3; 1) ponton, a meredeksége pedig  $\frac{1}{2}$ . Rajzold meg ezt az egyenest, és állapítsd meg, hogy áthalad-e a (-7; -4) ponton!



## HÁZI FELADAT

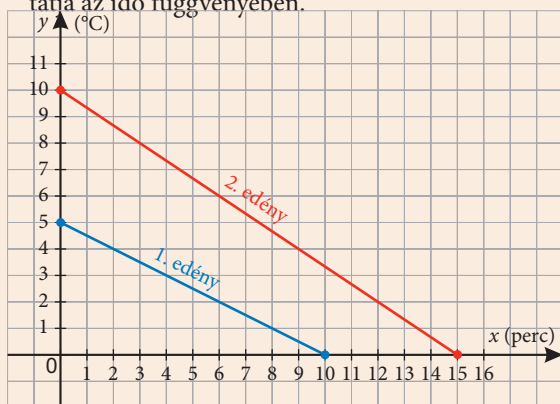
1. a) Ábrázold a következő egyenes arányosságot leíró függvényeket:

$$(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}): x \mapsto -x; x \mapsto -\frac{3}{2}x; x \mapsto -\frac{4}{3}x!$$

b) Írd fel a grafikonok egyenletét!

c) Add meg az egyenesek meredekségét!

2. Két kisebb edényben víz van. A vizet mindkét edényben addig hűtjük, amíg el nem éri a  $0^\circ\text{C}$  hőmérsékletet. Az ábra a hőmérséklet változását mutatja az idő függvényében.



- a) Mekkora volt az egyes edényekben a víz hőmérséklete a hűtés kezdetekor?  
 b) Mennyi a grafikonok egyenesének meredeksége?  
 c) Hány fokot hűl az első, illetve a második edényben lévő víz percenként?  
 d) Hány perc alatt hűl  $1^\circ\text{C}$ -ot az első, illetve a második edényben lévő víz?  
 e) Melyik edényben gyorsabb a hűlési folyamat?

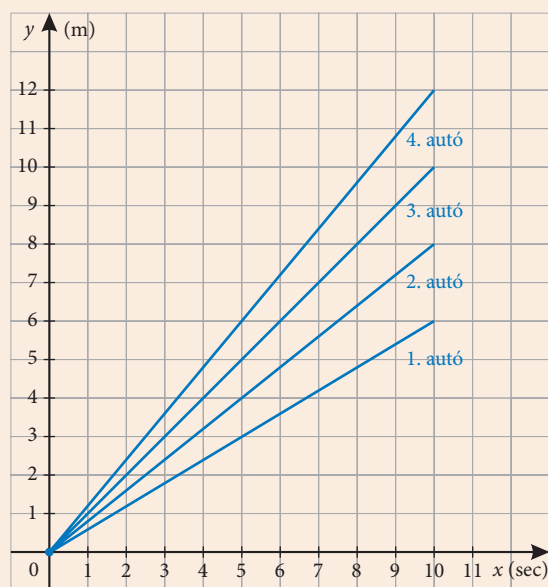
3. A  $P(1; 3)$  pont rajta van az  $a, b, c, d$  egyenesek mindegyikén. A  $P$  ponton kívül az  $a$  egyenes átmegy

a  $Q(0; 1)$  ponton, a  $b$  egyenes az  $R(3; 5)$  ponton, a  $c$  egyenes az  $S(3; 6)$  ponton, a  $d$  egyenes pedig a  $T(4; 0)$  ponton.

a) Rajzold meg az egyeneseket egy koordináta-rendszerben!

b) Mekkora az egyenesek meredeksége?

4. Távirányítású játékautókat teszteltek. A kocsikat egyenes pályán futtatták és azt mérték, mekkora utat tesznek meg akkor, amikor már elérték a végsebességüket. A mérés mindegyik esetben 10 másodpercig tartott.



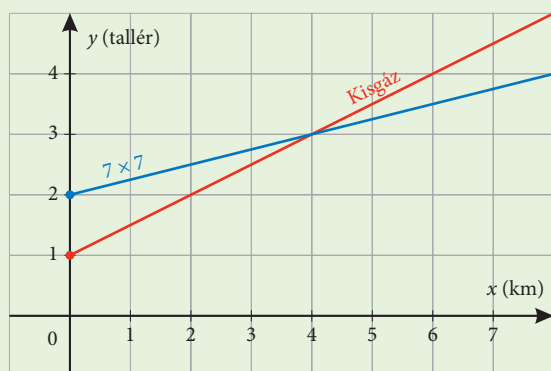
- a) Írd fel mindegyik grafikon egyenletét!  
 b) Mennyi a grafikonok egyenesének meredeksége?  
 c) Mekkora az egyes autók végsebessége  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ban, illetve  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban kifejezve ( $1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ )?

## RÁADÁS

1. Egy egyenesnek ismerjük két pontját:  $P(152; -355)$  és  $Q(-233; -104)$ . Mennyi az egyenes meredeksége?
2. Oldjuk meg az előző feladatot általánosan! Tekintsük a  $P(a; b)$  és a  $Q(c; d)$  pontokat. Írd fel a betűk segítségével a rajtuk átmenő egyenes meredekségét! Mindig lesz megoldás, vagy lehetnek a változóknak olyan értékei, amikor nem tudjuk felírni a meredekséget?

## FELADAT

1. Ábránkon a piros és a kék félegyenes azt mutatja, hogy hány tallért kell fizetnünk a megtett út hosszától függően a Kisgáz, illetve a  $7 \times 7$  fuvarozócég taxijába ülve.



- Mitől függ az, hogy melyik taxit érdemes igénybe vennünk? (Úgy képzeljük, hogy sehol sem kell megállnunk, csak a célállomáson.)
- Az alapdíjon felül mekkora a megtett kilométerenként fizetendő díj az egyik, illetve a másik cég esetében?
- Mekkora a grafikonok meredeksége?
- Összesen hány tallért kell fizetnünk az egyik, illetve a másik cégnél, ha  $x$  km-t taxizunk? Add meg képlettel!
- Számítsd ki a képlettel, hogy mennyit mutat a taxióra a két cégnél 2,8 km, 4,8 km, 6,8 km megtétele után!
- Olvasd le a grafikonról, hogy hány km-t taxizhatsz 4 tallérért az egyik, illetve a másik cégnél!

## ELMÉLET

**Definíció:** Egy függvényt **elsőfokú függvénynek** nevezünk, ha

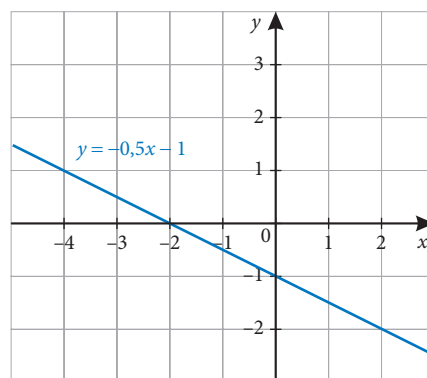
- értelmezési tartománya a valós számok halmaza, és
- hozzárendelési szabálya  $x \mapsto ax + b$  alakú, ahol  $a$  és  $b$  adott valós szám,  $a \neq 0$ .

Az  $x \mapsto ax + b$  hozzárendelési szabályú elsőfokú függvény grafikonja olyan egyenes, amely mindkét koordinátatengelyt metszi. Ennek az egyenesnek a meredeksége  $a$ , az ordinátatengelyt pedig a  $b$  második koordinátájú pontban metszi.

Ha a koordináta-rendszer tengelyeit az  $x$  és az  $y$  betűvel jelöljük, akkor ennek a grafikonnak az egyenlete:  $y = ax + b$ .

*Például*

Az  $x \mapsto -0,5x - 1$  elsőfokú függvény grafikonja egy olyan egyenes, amelynek meredeksége  $-0,5$ , az ordinátatengelyt pedig a  $-1$  második koordinátájú pontban metszi. Az egyenes egyenlete:  $y = -0,5x - 1$ .



Az olyan függvényeket, amelyek grafikonja egy egyenes vagy annak egy részhalmaza, **lineáris függvényeknek** nevezük.



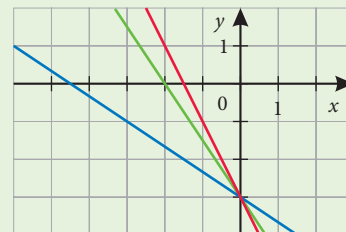
Az  $a$  és  $b$  szerepét vizsgálhatod a GeoGebra programmal is.

## FELADAT

2. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő elsőfokú függvényeket!

$$x \mapsto 1,5x + 2; \quad x \mapsto -x + 2; \quad x \mapsto \frac{2}{3}x + 2$$

3. Az ábrákon megadott három egyenes egy-egy elsőfokú függvény grafikonja. Mi a függvények hozzárendelési szabálya?



## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Van-e olyan elsőfokú függvény, amely a 2-höz 1-et, a 4-hez pedig 5-öt rendel?

*Megoldás*

A függvény grafikonjából két pontot ismerünk:  $P(2; 1)$  és  $Q(4; 5)$ . Ez a két pont egy egyenest határoz meg.

Az  $x \mapsto ax + b$  hozzárendelési szabályú elsőfokú függvény grafikonja egyenes. Az egyenes meredeksége  $a$ , és az ordinátatengelyt  $b$ -nél metszi.

A grafikonról leolvashatjuk, hogy az egyenes meredeksége 2, és az  $y$  tengelyt a  $-3$  pontban metszi. Az egyenlete ezért:  $y = 2x - 3$ .

A két ismert pontból *számolással* is megkaphatjuk az egyenletet:

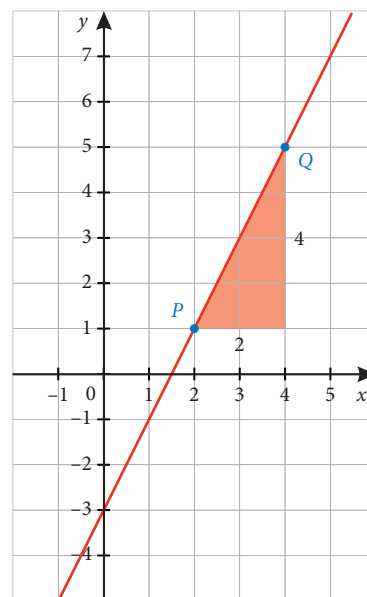
$$\text{Meredeksége} = \frac{\text{második koordináták különbsége}}{\text{első koordináták különbsége}} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = 2.$$

Miután a meredekséget már kiszámoltuk, így az  $y = 2x + b$  egyenletből csak a  $b$ -t nem ismerjük. Az adott pontok bármelyikének koordinátái az egyenletbe helyettesítve ki kell elégítsék az egyenletet.  $P(2; 1)$  pont esetén  $x = 2$  és  $y = 1$ .

Ezeket behelyettesítve:  $1 = 2 \cdot 2 + b$ . Ebből  $b = -3$ .

A keresett elsőfokú függvény tehát:  $\mathbf{R \rightarrow R; } x \mapsto 2x - 3$ .

(Ellenőrzés:  $2 \mapsto 2 \cdot 2 - 3 = 1$  és  $4 \mapsto 2 \cdot 4 - 3 = 5$ .)



## FELADAT

4. Egy elsőfokú függvény grafikonjának két pontja:  $A(1; 2)$  és  $B(3; 3)$ . Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

## KIDOLGOZOTT FELADAT

2. A hőmérsékletet a legtöbb országban – így pl. Kanadában is – Celsius-fokban ( $^{\circ}\text{C}$ ) mérik. Az Egyesült Államokban és még néhány más országban azonban az úgynevezett Fahrenheit-fokot ( $^{\circ}\text{F}$ ) használják. Így aztán a kanadai időjárás-jelentésben egészen más számok hangzanak el, mint az egyesült államokbeliben, még akkor is, ha a határ két oldalán, egymástól alig néhány km-re fekvő városokról van szó, ahol nyilvánvalóan ugyanolyan az idő.

Például:

|             |     |    |    |    |
|-------------|-----|----|----|----|
| Kanada (°C) | -10 | 0  | 20 | 25 |
| USA (°F)    | 14  | 32 | 68 | 77 |

- a) Adjuk meg képlettel, milyen összefüggés áll fenn a Celsius- és a Fahrenheit-skála között!
- b) Mennyi a jég olvadáspontja Fahrenheit-fokban?
- c) A Fahrenheit-skála egyik alappontja eredetileg a 96 °F volt. Mi szolgálhatott alapul ehhez az értékhez? Mennyi Celsius-fokban a 96 °F?



Megoldás

- a) Ábrázoljuk az adatokat koordináta-rendszerben:

A pontok egy egyenesen vannak. Ha tehát egy kanadai hőmérőn  $x$  °C a hőmérséklet, és ugyanitt, ugyanekkor egy egyesült államokbeli hőmérő  $y$  °F-et mutat, akkor  $y = a \cdot x + b$ .

Az  $a$  meredekséget megállapíthatjuk pl. az első két pont alapján:

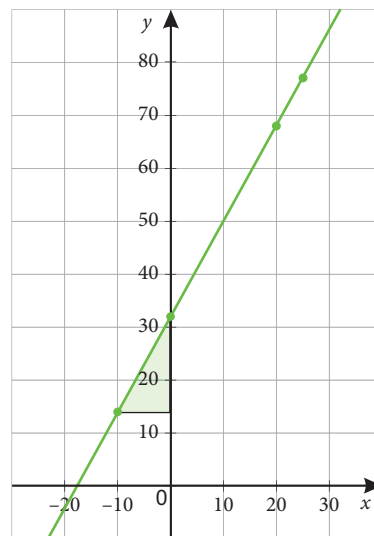
$$a = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}, \text{ a } b \text{ tengelymetszet pedig a táblázat alapján pontosan 32.}$$

Így a keresett képlet:  $y = \frac{9}{5} \cdot x + 32$ , vagy „beszédes” formában:  $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$ .

- b) A jég olvadáspontja:  $\frac{9}{5} \cdot 0 + 32 = 32$  (°F).

- c) Az  $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$  egyenlet átrendezhető a  $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$  alakba is, így a két hőmérsékleti skála szerinti bármelyik értéket át tudjuk váltani a másikba.

A 96 °F értéke °C-ban:  $\frac{5}{9} \cdot (96 - 32) \approx 36$ , ami körülbelül az emberi test hőmérséklete.



Példánkban a kétféle hőmérsékleti skála kapcsolatát egy olyan képlet írja le, amelyhez a koordináta-rendszerben egy egyenes tartozik. Az egyenes latin neve linea. Ennek nyomán a kétféle hőmérsékleti skála közötti kapcsolatot *lineárisnak* nevezzük.

## FELADAT

5. a) „Fahrenheit 451 fok – az a hőmérséklet, amely-nél a könyvnyomó papír tüzet fog és elég. Ha vonalazott papírt tesznek eléd – másra írd.” (Juan Ramun Jiminez) Az idézet Ray Bradbury *Fahrenheit 451* című regényének bevezetője. Hány °C-on fog tüzet a könyvnyomó papír?

- b) Ha a kanadai időjárás-jelentésben az hangzik el, hogy a határ menti településeken 10 °C-kal (5 °C-kal, 1 °C-kal) csökken a hőmérséklet, akkor az USA-ban élők hány °F-os csökkenésre számíthatnak?

## HÁZI FELADAT

1. Add meg egy olyan lineáris függvény hozzárendelési szabályát,
- a) amely a 0-hoz 2,5-et, az 1-hez 4,5-et rendel;
- b) amely a 0-hoz 10-et, az 1-hez 8,5-et rendel;
- c) amely a 0-hoz 2-t, és az 5-höz is 2-t rendel!

2. Egy elsőfokú függvény grafikonja átmegy a  $P$  és a  $Q$  ponton. Add meg a függvény hozzárendelési szabályát, ha
- a)  $P(-1; 5)$  és  $Q(0; 4)$ ;
- b)  $P(-3; 1)$  és  $Q(3; 5)$ !



3. Töltsd ki a füzetedben a táblázat üres mezőit, ha  $f(x) = -\frac{2}{3}x$  és  $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$  ( $x \in \mathbb{R}$ )!

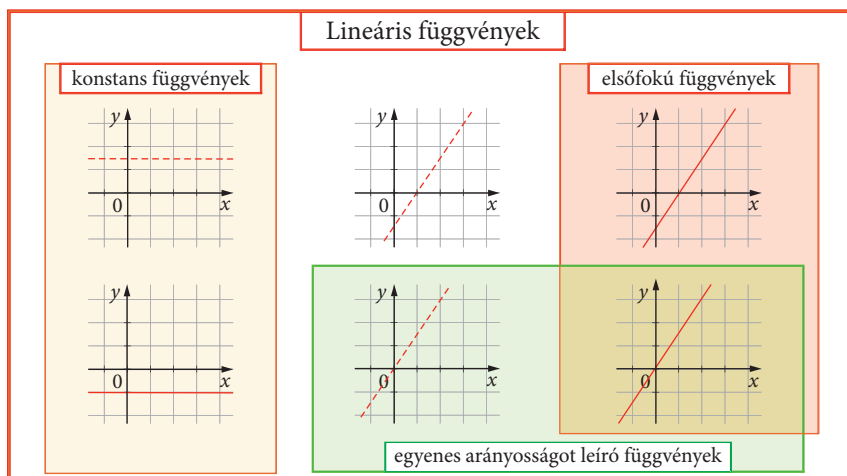
| $x$ | $f(x)$                        | Megfelelő pont a grafikonon | $g(x)$ | Megfelelő pont a grafikonon |
|-----|-------------------------------|-----------------------------|--------|-----------------------------|
| -6  | $-\frac{2}{3} \cdot (-6) = 4$ | $(-6; 4)$                   |        |                             |
| -3  |                               |                             |        |                             |
|     |                               |                             |        | $(0; 4)$                    |
|     |                               |                             | 0      |                             |
| 8   |                               |                             |        |                             |

4. Van-e olyan hőmérséklet, amely °F-ben és °C-ban mérve is ugyanannyi?

## RÁADÁS

Halmazábrával így szemléltethetjük a lineáris függvények fajtáit:

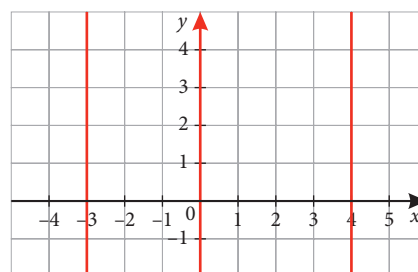
Emeljük ki azokat a lineáris függvényeket, amelyek **értelmezési tartománya a valós számok halmaza**. Ezek grafikonja egy egyenes. Táblázatunk megmutatja, mit érdemes megjegyeznünk ezekről a speciális esetekről:



| $a$ és $b$ változása          | $a = 0$                    | $a \neq 0$ és $b = 0$                                 | $a \neq 0$ és $b \neq 0$                                          |
|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| A hozzárendelési szabály      | $x \mapsto b$              | $x \mapsto ax$                                        | $x \mapsto ax + b$                                                |
| Milyen függvény?              | konstans függvény          | elsőfokú függvény és egyenes arányosságot leíró is    | elsőfokú függvény, nem egyenes arányosságot leíró                 |
| A grafikon egy egyenes, amely | merőleges az $y$ tengelyre | átmegy az origón, de nem az $x$ és nem az $y$ tengely | metszi az $x$ és az $y$ tengelyt is az origótól különböző pontban |

Igaz az is, hogy egy  $x$ - $y$  koordináta-rendszer minden egyenese, amely **nem merőleges az  $x$  tengelyre**, egy elsőfokú vagy egy konstans függvénya grafikonja.

Az  $y$  tengely egyenese és a vele párhuzamos egyenesek nem függvénygrafikonok. Miért? Mert nem igaz rájuk, hogy mindegyik pontnak más szám az első koordinátája, azaz az így ábrázolt hozzárendelések az értelmezési tartomány egy  $x$  értékéhez nem csak egy  $y$  értéket rendelnek – így nem lehetnek függvények.



## BEVEZETŐ

Péter egy egyenes országúton állandó,  $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  sebességgel biciklizik. Egy óra után keresztülhalad egy vonalon, amelyet egy kerékpáros verseny startvonalaként festettek az útburkolatra.

Ábrázoljuk grafikonon Péter távolságát a startvonalától az idő függvényében!



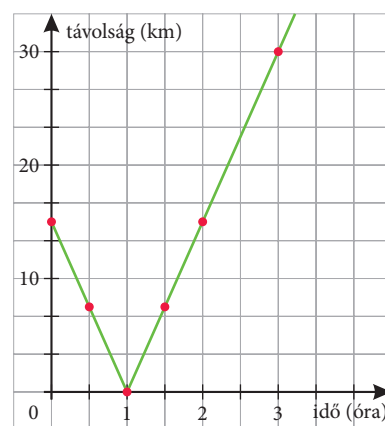
## Megoldás

Péter az első egy órában közeledett a startvonalhoz. Mivel egy óra alatt 15 km-t teker, 15 km távról indult, s ez a távolság egyenletesen csökkent: fél óra után már csak 7,5 km volt. 1 óra elteltével a vonaltól mért távolsága 0 km. Ezután megint egyenletesen nőtt a távolság. Az indulástól számítva 1,5 óra múlva 7,5 km, 2 óra múlva 15 km, 3 óra múlva 30 km.

Foglaljuk táblázatba az adatokat:

| idő (óra)     | 0  | 0,5 | 1 | 1,5 | 2  | 3  |
|---------------|----|-----|---|-----|----|----|
| távolság (km) | 15 | 7,5 | 0 | 7,5 | 15 | 30 |

Ábrázoljuk grafikonon az adatokat, majd a teljes utazást!



## ELMÉLET

**Definíció:** Egy valós szám **abszolút értéke** nemnegatív számok esetén maga a szám, negatív számok esetén a szám ellentettje. Jele:  $|x|$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

(például:  $|7| = 7$ , vagyis +7 abszolút értéke maga a szám, a +7;  $|-3| = -(-3) = 3$ , vagyis -3 abszolút értékét úgy képezzük, hogy vesszük a -1-szeresét)

## KIDOLGOZOTT FELADAT

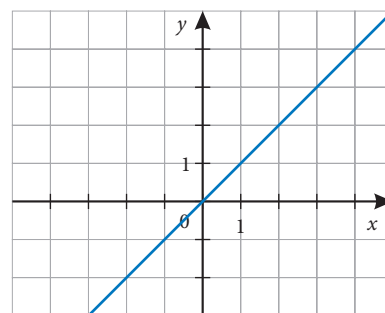
Ábrázoljuk a következő függvényeket:

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |x|;$

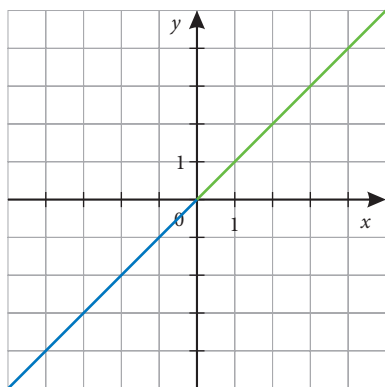
b)  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |2x + 2|;$

## Megoldás

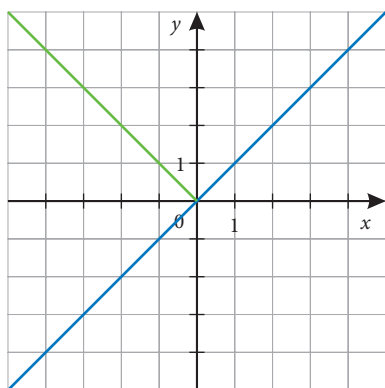
a) Ábrázoljuk először az  $x \mapsto x$  függvényt a valós számok halmazán!



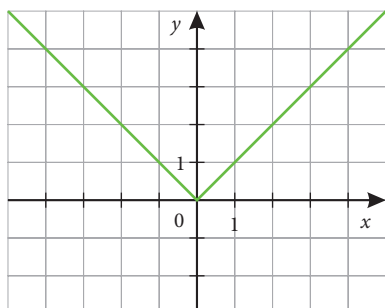
Ha a függvényérték nemnegatív (nulla vagy pozitív értékű), akkor abszolút értéke önmaga, ezért az  $x \mapsto x$  függvény grafikonján a nemnegatív függvényértékű pontok illeszkednek az  $x \mapsto |x|$  függvény grafikonjára is (azaz az  $x$  tengelyre illeszkedő pont és az  $x$  tengely fölött lévő pontok helyben maradnak).



Ha a függvényérték negatív, akkor abszolút értéke az eredeti függvényérték ellentettje, ezért az adott helyen nem az  $x \mapsto x$  függvény grafikonjának pontjai, hanem azok  $x$  tengelyre vett tükörképei illeszkednek az  $x \mapsto -x$  függvény grafikonjára.

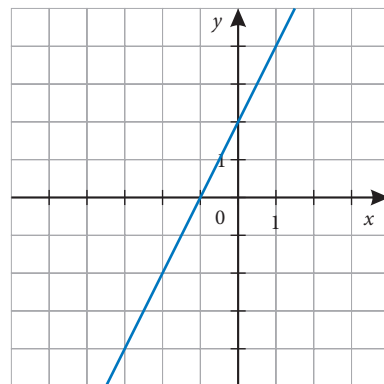


Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$  grafikonja tehát:

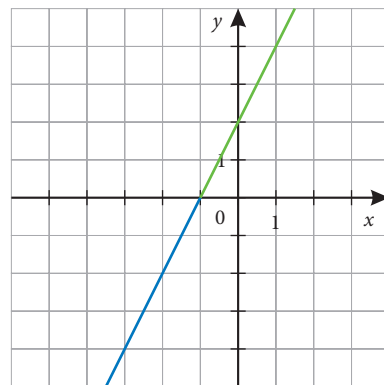


Látható, hogy az  $x \mapsto |x|$  függvény mindegyik értéke pozitív vagy 0.

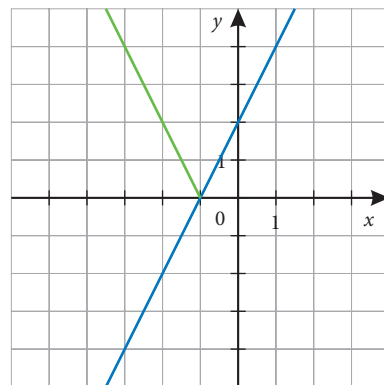
b) Ugyanígy gondoljuk végig  $g$  függvény esetében is! Ábrázoljuk az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 2$  függvényt!



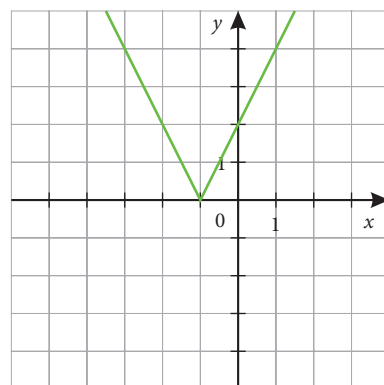
Amikor a függvényértékek nem negatívak, akkor abszolút értékük maguk a függvényértékek, ezért értékük nem változik (a függvény grafikonja helyben marad).



Amikor a függvényértékek negatívak, akkor abszolút értékük az eredeti függvényérték ellentettje, ezért az ábrázoláshoz a negatív értékű függvényt pontokat tükrözzük az  $x$  tengelyre.



$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |2x + 2|$  grafikonja:



## FELADAT

1. Ábrázold a következő függvényeket!

a)  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto 3x$  és  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto |3x|$

b)  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto 0,5x + 2$  és  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto |0,5x + 2|$

## ELMÉLET

**Definíció:** Azt a függvényt, amely minden valós számhoz az abszolút értékét rendeli, **abszolútérték-függvénynek** nevezzük.

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto |x|;$

Az abszolútérték-függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete pedig a nemnegatív valós számok halmaza.

Ha  $x < 0$ ; akkor a függvény szigorúan monoton csökkenő,

ha  $x > 0$ ; akkor a függvény szigorúan monoton növekvő.

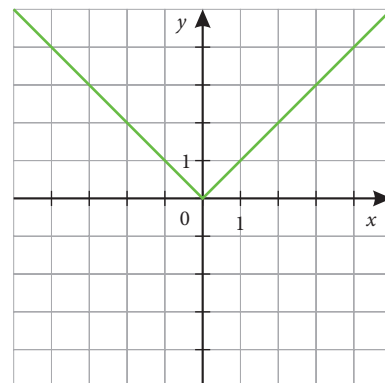
Az abszolútérték-függvény  $x = 0$  esetén veszi fel az értékkészlet legkisebb elemét, ezt úgy mondjuk, hogy  $x = 0$ -ban az abszolútérték-függvénynek **minimuma** van.

A függvény minimumának értéke  $f(0) = 0$ .

**Definíció:** Egy  $f$  függvénynek **minimuma** van az értelmezési tartomány egy  $x_0$  helyén, ha a függvény az ott felvett  $f(x_0)$  függvényértéknél sehol sem vesz fel kisebb értéket. Ekkor  $x_0$  egy **minimumhely**,  $f(x_0)$  pedig a függvény **minimuma**.

**Definíció:** Egy  $f$  függvénynek **maximuma** van az értelmezési tartomány egy  $x_0$  helyén, ha a függvény az ott felvett  $f(x_0)$  függvényértéknél sehol sem vesz fel nagyobb értéket. Ekkor  $x_0$  egy **maximumhely**,  $f(x_0)$  pedig a függvény **maximuma**.

A minimumot és a maximumot **szélsőértékeknek** is nevezzük.



## FELADAT

2. Olvasd le az abszolútérték-függvény grafikonjáról!

a) Melyik számok abszolút értéke 4,5?

b) Melyik szám abszolút értéke egyenlő a nála 3-mal nagyobb szám abszolút értékével?

3. Ábrázold a függvényeket, majd olvasd le a grafikonról, hol veszi fel a függvény a minimumát?

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = |1,5x + 4|$

b)  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = |3x - 6|$

c)  $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; h(x) = |-2x + 2|$

4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket!

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = -\frac{2}{3}x$

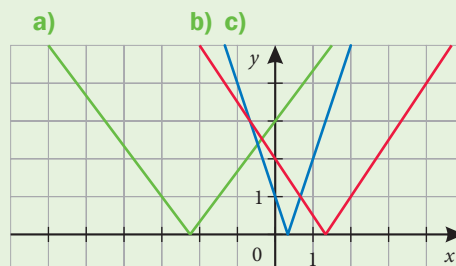
$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; g(x) = |2x + 8|$

a) Olvasd le a metszéspontok koordinátáit!

b) Mit fejeznek ki a metszéspontok koordinátái?

c) Számolással ellenőrizd, hogy az a) részben leolvasott metszéspont koordináták helyesek-e!

5. Határozd meg, melyik függvény grafikonja látható az ábrán!



Írd fel a hozzárendelési szabályokat két különböző módon!

## HÁZI FELADAT

1. Ábrázold a következő függvényeket!

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto -0,5x + 2 \quad \text{és}$$

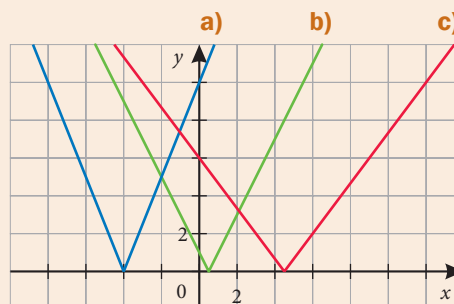
$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |-0,5x + 2|$$

2. Ábrázold a függvényeket, majd olvasd le a grafikonról, hol veszi fel a függvény a minimumát?

a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad f(x) = |4x + 8|$

b)  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad g(x) = |-3x - 3|$

3. Határozd meg, melyik függvény grafikonja látható az ábrán! Add meg a hozzárendelési szabályokat!



## RÁADÁS

1. Ha ismerjük egy  $f$  függvény grafikonját, akkor hogyan készíthetjük el egyszerűen az  $g: g(x) = f(x) - 2$  függvény grafikonját?

a) Ábrázold közös koordinátarendszerben:  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |x|$  és  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |x| - 2!$

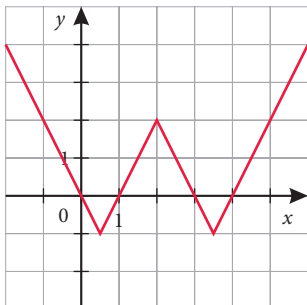
b) Ábrázold közös koordinátarendszerben:  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |2x|$  és  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |2x| - 2!$

2. Ábrázold a következő függvényt!

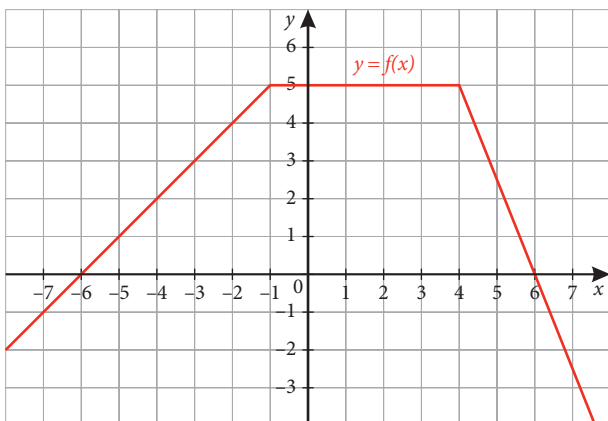
a)  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |2x| - 2$

b)  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad x \mapsto |x + 3| - 2$

3. Határozd meg, melyik függvény grafikonja látható az ábrán!

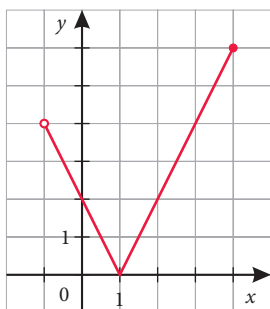


4. Az ábrán látható  $f(x)$  függvény grafikonjának ismeretében ábrázoljuk az  $f(x) + 1$ ;  $f(x - 3)$ ;  $|f(x)|$  függvények grafikonját!



## KIDOLGOZOTT FELADAT

Az ábrán egy  $f$  függvény grafikonját látod. Olvasd le a grafikonról a függvény értelmezési tartományát, növekedési viszonyait, szélsőértékeit, zérushelyét és értékkészletét!



## Megoldás

A függvény értelmezési tartománya az  $x$  tengelyről olvasható le. Mindazok a számok beletartoznak, amelyekhez a függvény rendelt valamit, azaz amelyekhez tartozik függvényérték. Ez most balról nyílt intervallum: a  $-1$ -hez

már nem rendelt értéket a függvény, de a  $4$ -hez még igen.  $D_f = ]-1; 4]$ .

A függvény a  $] -1; 1[$  intervallumon szigorúan monoton csökkenő, majd az  $]1; 4]$  intervallumon szigorúan monoton növekvő.

A grafikonról az is látszik, hogy a függvénynek van legkisebb és legnagyobb értéke. Ezek a függvény szélsőértékei. Minimuma (minimum értéke)  $0$ ; minimumhelye  $1$ ; maximuma (maximum értéke)  $6$ ; maximumhelye  $4$ .

A függvény a  $0$  értéket az  $x = 1$  helyen veszi fel, ezért zérushelye csak egy van: az  $1$ .

Az  $y$  tengelyen olvasható le a függvény értékkészlete. Minden  $0$  és  $6$  közötti valós számot felvesz valahol a függvény.

A függvény értékkészlete:  $R_f = [0; 6]$ .

Érdekesége, hogy van azonban olyan szám az értékkészletben, amelyet több helyen is felvesz a függvény. Például  $f(x) = 3$ -hoz kétféle elem is tartozik az értelmezési tartományból:  $x_1 = -0,5$  és  $x_2 = 2,5$  (ezért nem kölcsönösen egyértelmű).

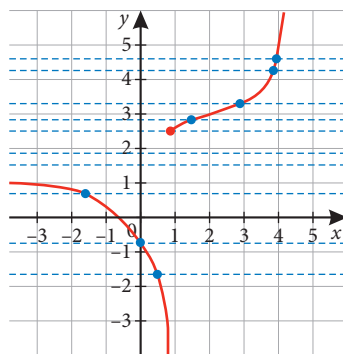
## ELMÉLET

**Definíció:** Egy függvény **kölcsönösen egyértelmű**, ha az értelmezési tartomány különböző elemeihez a képhalmaz különböző elemeit rendeli.

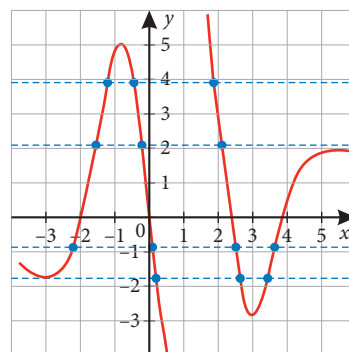
Az ilyen függvény azért is különleges, mert a megfordítása is függvény: az a hozzárendelés, amely az értékkészlet minden eleméhez az „őst” rendeli, azt az elemet, amelyhez eredetileg hozzárendeltük.

Ha egy függvény értelmezési tartománya és értékkészlete számhalmaz, akkor van grafikonja. Akárhogyan állítunk merőlegest a koordináta-rendszer  $x$  tengelyére (az abszcisszatengelyre), annak **legfeljebb egy** közös pontja van ezzel a grafikonnal (ha egynél több közös pontja van, akkor nem függvény; nem egyértelmű a hozzárendelés).

Ha egy függvény olyan, hogy a grafikonjának az  $y$  tengelyre (az ordinátatengelyre) állított merőlegesekkel is legfeljebb egy közös pontja van, akkor ez a függvény kölcsönösen egyértelmű.



kölcsönösen egyértelmű függvény



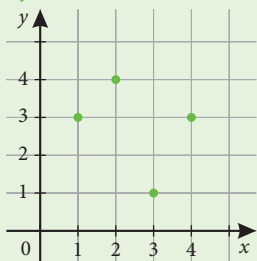
nem kölcsönösen egyértelmű függvény



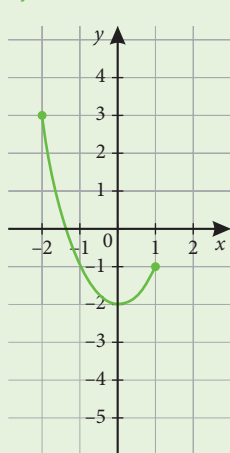
# FELADAT

1. Olvasd le a függvények értelmezési tartományát, növekedési viszonyait, szélsőértékeit! Melyik ezek közül kölcsönösen egyértelmű függvény?

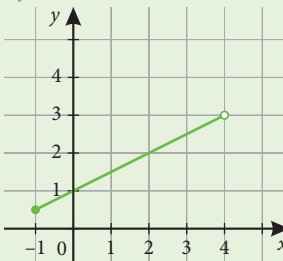
a)



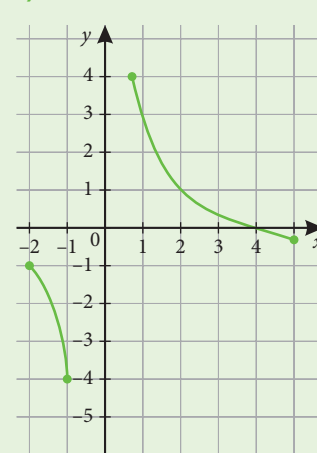
b)



c)



d)



2. Az  $f$  függvény kölcsönösen egyértelmű, értelmezési tartománya pedig a  $\{10; 20; 30; 40; 50\}$  halmaz. Melyik halmaz lehet az  $f$  értékkészlete az alábbiak közül?

a)  $\{0; 1; 5; 11; 9\}$

b)  $\{m\}$

c)  $\{-4; -3; 0; 2; 3\}$

d)  $\{A; B; C; D\}$

3. Biztos-e, lehetséges-e, lehetetlen-e, hogy az  $f$  függvény kölcsönösen egyértelmű, ha

a)  $D_f$  is és  $R_f$  is 5 elemű halmaz;

c)  $D_f$  is és  $R_f$  is végtelen halmaz?

b)  $D_f$  10 elemű és  $R_f$  7 elemű halmaz;

4. Adj meg egy-egy olyan függvényt, amelynek a hozzárendelési szabálya  $x \mapsto |x|$ , és a függvény

a) kölcsönösen egyértelmű;

b) nem kölcsönösen egyértelmű!

5. Jellemezd a függvények növekedési viszonyait grafikonjuk alapján!

Emlékeztető:

Ha egy függvény az értelmezési tartomány nagyobb eleméhez

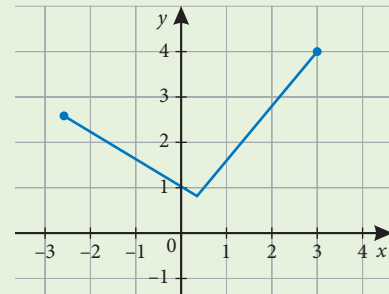
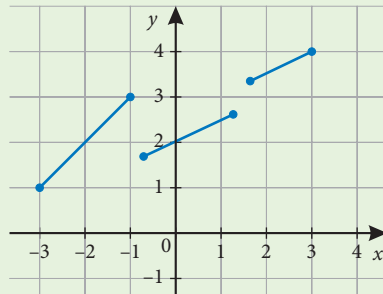
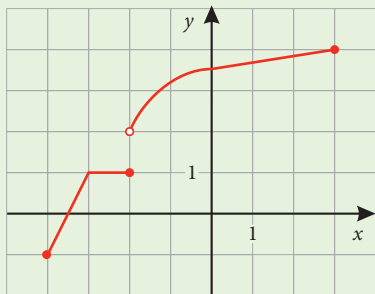
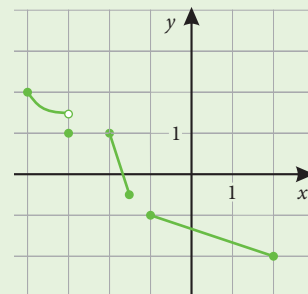
– **nagyobb vagy egyenlő** értéket rendel, akkor **monoton növekvő**;

– **nagyobb** értéket rendel, akkor **szigorúan monoton növekvő**;

– **kisebb vagy egyenlő** értéket rendel, akkor **monoton csökkenő**;

– **kisebb** értéket rendel, akkor **szigorúan monoton csökkenő**

az adott intervallumon.



- 6** ☞ Döntsd el, melyik állítás igaz, ha az  $f$  függvény értelmezési tartománya és értékkészlete is számhalmaz!
- a) Ha az  $f$  szigorúan monoton függvény, akkor kölcsönösen egyértelmű.
- b) Ha az  $f$  kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor  $f$  szigorúan monoton.

## ELMÉLET

A valós számokon értelmezett függvények vizsgálatakor eddig ilyen kérdésekre kerestük a választ:

- Mi a függvény értelmezési tartománya, képhalmaza és hozzárendelési szabálya?
- Mi jellemzi a függvény növekedési viszonyait?
- Vannak-e szélsőértékei? Mely helyeken?
- Vannak-e zérushelyei, melyek ezek?
- Kölcsönösen egyértelmű-e a függvény?
- Mi az értékkészlete?

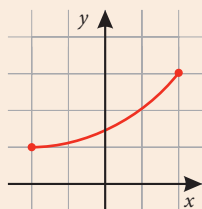
Ezt nevezzük függvényvizsgálatnak.

Sok olyan függvény van azonban, amelyek esetén még nem tudjuk a pontos választ minden kérdésre. Vagy azért, mert még kevés az ismeretünk, vagy azért mert a felsőbb matematika eszközeivel sem lehet pontos választ adni.

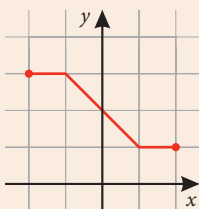
## HÁZI FELADAT

- 1** ☞ Grafikonja alapján állapítsd meg, melyik függvény monoton, és melyik nem az! A monoton függvények szigorúan monotonok-e?

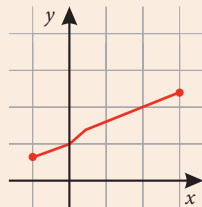
a)



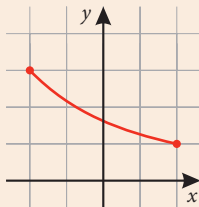
b)



c)



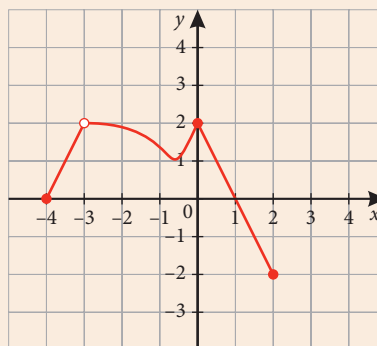
d)



- 2** ☞ Az  $f$  függvény értelmezési tartománya az  $\{1; 2; 3; 4\}$  halmaz, hozzárendelési szabálya pedig:  $x \mapsto \frac{1}{2}x$ . Add meg  $f$  értékkészletét, és állapítsd meg, igazak-e az alábbi kijelentések!
- a)  $f$  monoton függvény.
- b)  $f$  szigorúan monoton növekvő függvény.
- c)  $f$  kölcsönösen egyértelmű.

- 3** ☞ Hány olyan függvény van, amelynek értelmezési tartománya az  $\{1; 2; 3\}$  halmaz, értékkészlete pedig a  $\{2; 4; 9\}$  halmaz? Add meg mindegyiket egy-egy táblázattal! Közülük melyik kölcsönösen egyértelmű?

- 4** ☞ Az ábrán egy függvény grafikonját látod. Döntsd el a függvényre vonatkozó alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!



- a) a függvény értelmezési tartománya  $[-4; 2]$ ;
- b) a függvény szigorúan monoton növekvő, ha  $-4 \leq x < -3$ ;
- c)  $f(0) = -4$ ;
- d) a függvény értékkészlete  $[-2; 2]$ ;
- e) a függvény kölcsönösen egyértelmű;
- f) a függvény szigorúan monoton csökkenő  $x \in [-2; -1]$  esetén;
- g)  $f(1) = 0$ ;
- h) a függvény legkisebb értéke  $-2$ .

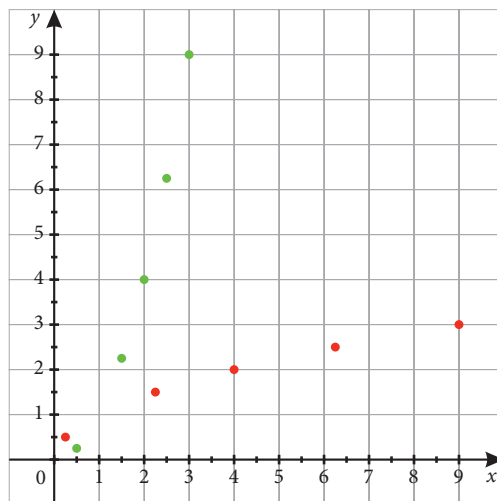
## ELMÉLET

A függvényt úgy is definiálhatjuk, hogy olyan rendezett párok nem üres halmaza, amelyek első tagja mind különböző.

*Ha egy függvény kölcsönösen egyértelmű, akkor a rendezett párok második tagja is mind különböző.* Ebben az esetben akkor is függvényt kapunk, ha mindegyik rendezett párban felcseréljük az első és a második tagot. Ez a függvény az eredetinek az **inverze**.

Például a  $\{(0,5; 0,25); (1,5; 2,25); (2; 4); (2,5; 6,25); (3; 9)\}$  függvény kölcsönösen egyértelmű, mert a rendezett párok első tagja is csupa különböző szám, és a második tagja is csupa különböző szám. Ennek a függvénynek az inverze:  $\{(0,25; 0,5) (2,25; 1,5); (4; 2); (6,25; 2,5); (9; 3)\}$ .

**Definíció:** Ha az  $f: x \mapsto f(x)$  kölcsönösen egyértelmű függvény értelmezési tartománya az  $A$ , értékkészlete pedig a  $B$  halmaz, akkor azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya a  $B$ , értékkészlete pedig az  $A$  halmaz, és a  $B$  halmaz minden  $y$  eleméhez azt az  $A$ -beli  $x$  elemet rendeli, melyre  $f(x) = y$ , az  $f$  függvény **inverzének** nevezzük. Az inverz függvény jelölése:  $f^{-1}$ .



## FELADAT

- 1.** Adjunk meg egy olyan kölcsönösen egyértelmű függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a természetes számok halmaza, értékkészlete pedig az egész számok halmaza!

*Megoldás*

Írjuk fel növekvő sorrendben a természetes számokat, alájuk pedig a 0-t és utána felváltva a pozitív és a negatív egész számokat, növekedő abszolút értékek szerint:

|   |   |    |   |    |   |    |   |    |     |
|---|---|----|---|----|---|----|---|----|-----|
| 0 | 1 | 2  | 3 | 4  | 5 | 6  | 7 | 8  | ... |
| 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 | 4 | -4 | ... |

Ha mindegyik természetes számhoz hozzárendeljük azt az egész számot, amely a táblázatban alatta van, akkor megkapjuk feladatunknak egy lehetséges megoldását. A hozzárendelési szabályt képlettel is felírhatjuk:

$$x \mapsto \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{ha } x \text{ páros pozitív egész szám,} \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \text{ha } x \text{ páratlan pozitív egész szám.} \end{cases}$$

Feladatunknak más megoldásait is előállíthatjuk. Cseréljük fel például a táblázat alsó sorában a 3-at és a  $(-4)$ -et! Ekkor egy másik függvényt kapunk, de ez is megfelel a feladat követelményeinek.

- 2.** Adj meg olyan kölcsönösen egyértelmű függvényt, amelynek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, és értékkészlete
- a negatív egész számok halmaza;
  - a természetes számok halmaza;
  - az 5-nél nagyobb egész számok halmaza!
- 3.** Igaz-e, hogy ha egy függvény szigorúan monoton növekvő, akkor
- van inverze;
  - az inverze is szigorúan monoton növekedő?
- 4.** Ábrázold közös koordináta-rendszerben az  $f$  függvényt és az inverzét, ha  $D_f = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$  és az  $f$  hozzárendelési szabálya:  $x \mapsto x^2$ . Mi az inverz függvény hozzárendelési szabálya?

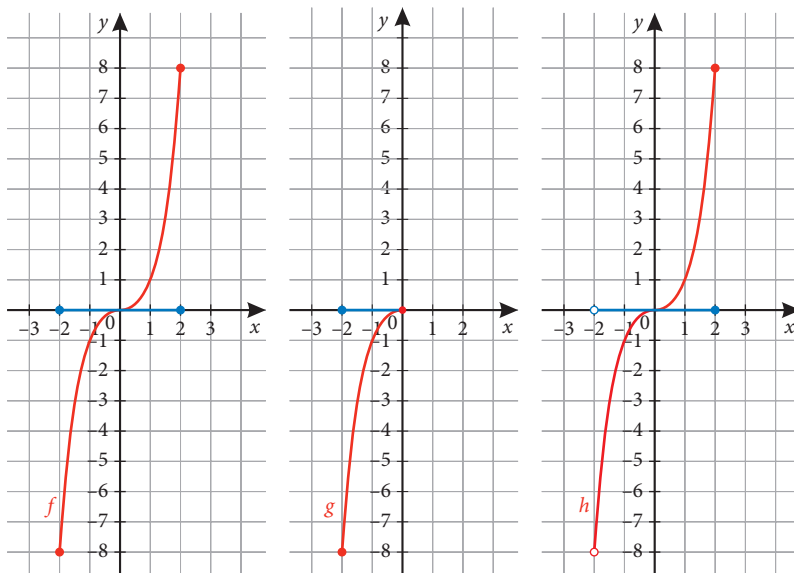
## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Három függvénynek, az  $f$ -nek, a  $g$ -nek és a  $h$ -nak ugyanaz a hozzárendelési szabálya, de más-más halmaz az értelmezési tartománya:  $D_f = [-2; 2]$ ,  $D_g = [-2; 0]$ ,  $D_h = ]-2; 2]$ ;  $f(x) = g(x) = h(x) = x^3$ . Van-e a függvények értékkészletének legnagyobb, illetve legkisebb eleme? Ha van, akkor melyik szám az?

Megoldás

Nagyobb számnak nagyobb a köbe is, ezért az  $x \mapsto x^3$  hozzárendelési szabályú függvények mind szigorúan monoton növekvők.

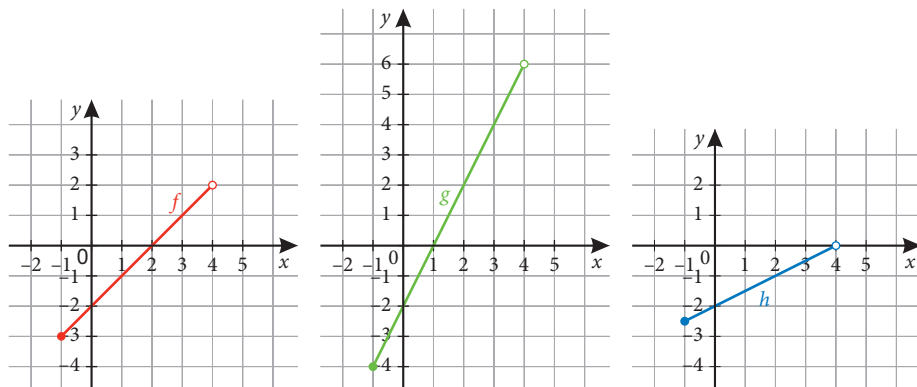
|                        | $f$ | $g$ | $h$   |
|------------------------|-----|-----|-------|
| Legnagyobb érték       | 8   | 0   | 8     |
| Legnagyobb érték helye | 2   | 0   | 2     |
|                        | $f$ | $g$ | $h$   |
| Legkisebb érték        | -8  | -8  | nincs |
| Legkisebb érték helye  | -2  | -2  | nincs |



2. Legyen  $D_f = D_g = D_h = [-1; 4[$  és  $f(x) = x - 2$ ,  $g(x) = 2x - 2$ ,  $h(x) = 0,5x - 2$ .

a) Rajzoljuk meg a függvények grafikonját, és adjuk meg  $f$ ,  $g$  és  $h$  legnagyobb és legkisebb értékét (ha van)!

Megoldás



|                        | $f$   | $g$   | $h$   |
|------------------------|-------|-------|-------|
| Legnagyobb érték       | nincs | nincs | nincs |
| Legnagyobb érték helye | nincs | nincs | nincs |

|                       | $f$ | $g$ | $h$  |
|-----------------------|-----|-----|------|
| Legkisebb érték       | -3  | -4  | -2,5 |
| Legkisebb érték helye | -1  | -1  | -1   |

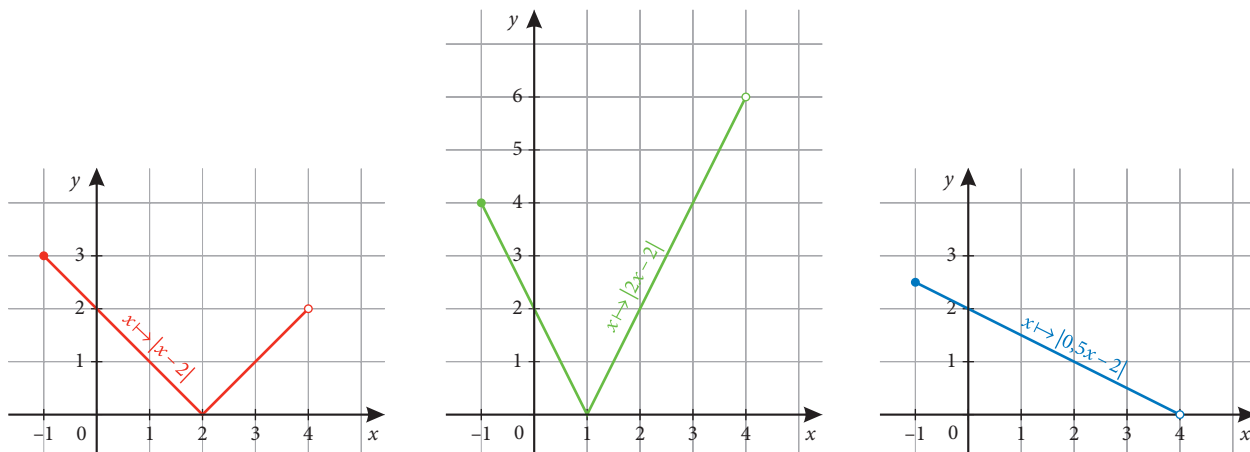
- b) Rajzoljuk meg az  $f$ ,  $g$  és a  $h$  függvény abszolút értékének grafikonját, és keressük meg az  $|f|$ ,  $|g|$ ,  $|h|$  függvények legnagyobb és legkisebb értékét!

Megoldás

Ha adott az  $f$  függvény, akkor az  $|f|$  azt a függvényt jelenti, amely az értelmezési tartomány  $x$  eleméhez  $|f(x)|$ -et rendel, vagyis minden esetben az  $f$  függvény által hozzárendelt érték abszolút értékét.

Itt a függvények hozzárendelési szabálya:  $x \mapsto |x - 2|$ ,  $x \mapsto |2x - 2|$ ,  $x \mapsto |0,5x - 2|$ .

Az új grafikonokat úgy kapjuk meg, hogy az eredeti grafikonok  $x$  tengely „alatti” részét tükrözzük az  $x$  tengelyre, a többi részt pedig a helyén hagyjuk.



|                        | $ f $ | $ g $ | $ h $ |
|------------------------|-------|-------|-------|
| Legnagyobb érték       | 3     | nincs | 2,5   |
| Legnagyobb érték helye | -1    | nincs | -1    |

|                       | $ f $ | $ g $ | $ h $ |
|-----------------------|-------|-------|-------|
| Legkisebb érték       | 0     | 0     | nincs |
| Legkisebb érték helye | 2     | 1     | nincs |



Az intervallumon értelmezett függvények ábrázolásához is használható a *Graph* program.

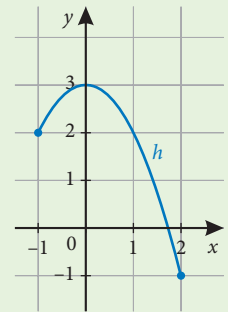
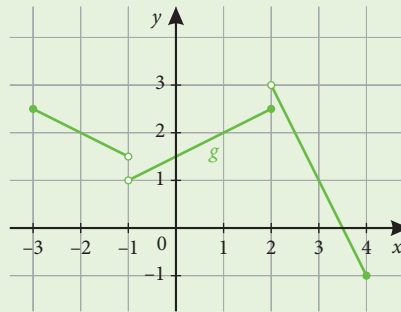
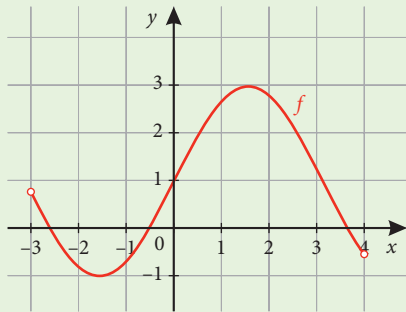
## FELADAT

1. Legyen  $D_f = [-1; 1]$ ,  $D_g = [-1; 2]$ ,  $D_h = ]-2; 1[$ ;  $f(x) = g(x) = h(x) = x^3$ . A következő kérdések megválaszolásában segítségként használd a kidolgozott feladathoz tartozó grafikonokat! Van-e a függvények értékkészletének legnagyobb, illetve legkisebb eleme? Ha van, akkor melyik szám az? Hol veszi fel a függvény a legnagyobb, illetve legkisebb értékét?

2. Legyen  $D_f = D_g = D_h = [-1; 4[$  és  $f(x) = -x + 2$ ,  $g(x) = -2x + 2$ ,  $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ .

- Rajzoljuk meg a függvények grafikonját, adjuk meg  $f$ ,  $g$  és  $h$  legnagyobb és legkisebb értékét, ha van!
- Rajzoljuk meg az  $f$ ,  $g$  és a  $h$  függvény abszolút értékének grafikonját, és keressük meg az  $|f|$ ,  $|g|$ ,  $|h|$  függvények legnagyobb és legkisebb értékét, ha van!

- 3** a) Olvasd le a grafikonokról a függvények legnagyobb és legkisebb értékét, ha ezek léteznek!



- b) Vázold a  $-f$ ,  $-g$  és  $-h$  függvények grafikonját, és állapítsd meg e három függvény legnagyobb és legkisebb értékét! (A  $-f$  jelölés azt a függvényt adja meg, amely az  $f$  értelmezési tartományának mindegyik eleméhez az eredeti helyettesítési érték ellentettjét rendeli hozzá.)
- c) Mennyi az  $|f|$ ,  $|g|$ ,  $|h|$  függvények legnagyobb és legkisebb értéke? Hol veszi fel a függvény a legnagyobb, illetve legkisebb értékét?

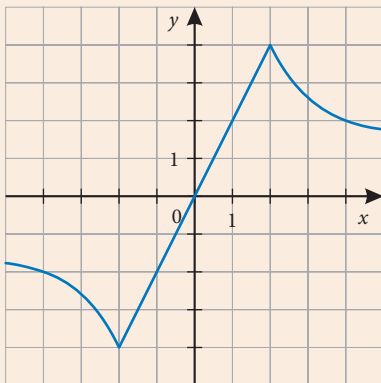
## HÁZI FELADAT

- 1** Legyen az  $f$  függvény értelmezési tartománya az  $[1; 3]$  zárt intervallum, és  $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ .

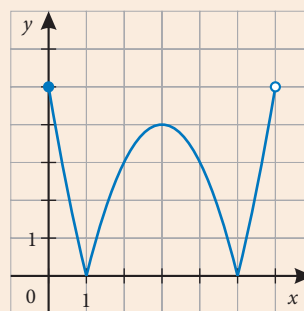
- a) Számold ki az  $f(1)$ ,  $f(2,8)$  és  $f(3)$  függvényértékeket!
- b) Ábrázold az  $f$  függvényt! Állapítsd meg a legnagyobb és a legkisebb függvényértéket!
- c) Rajzold le a  $g$  függvény grafikonját, ha  $D_g = [6; 10]$  és  $g(x) = \left| \frac{1}{2}x - 4 \right|$ !

- 2** Olvasd le a grafikonról a függvények maximumát és minimumát, ha léteznek! Határozd meg a függvények maximumának és minimumának a helyét!

a)



b)



- 3** Rajzold fel egy olyan  $f$  függvény grafikonját a koordináta-rendszerben, melyre teljesülnek a következők:  
 $D_f = [-5; 3]$ ;  $R_f = [-2; 6]$ ; minimumának helye  $x = -1$ ; maximumának helye  $x = 2$ .



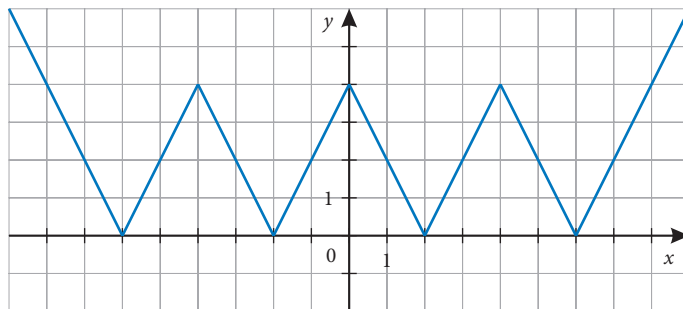
# 1. Ábrázoltuk egy $f$ függvény grafikonját.

Tekintsük a függvény leszűkítését egy  $[a; b]$  intervallumra! Ez azt a függvényt jelenti, amely az  $[a; b]$  intervallumon van értelmezve, és az intervallum elemeihez ugyanazt rendeli, mint az eredeti  $f$  függvény. (Az  $[a; b]$  intervallum az eredeti értelmezési tartomány részhalmaza kell legyen.)

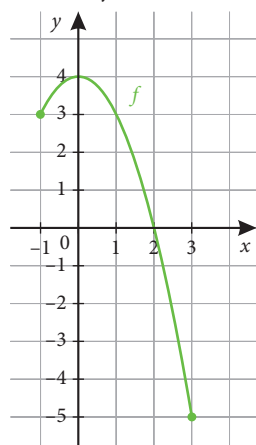
$$h: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(x)$$

Add meg  $a$  és  $b$  értékét úgy, hogy egész számok legyenek, és a  $h$  függvénynek

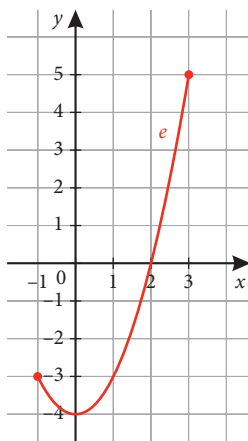
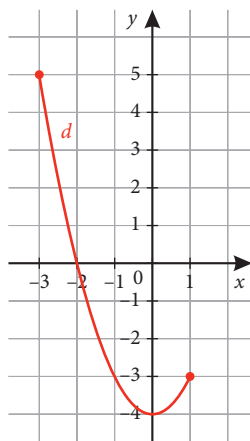
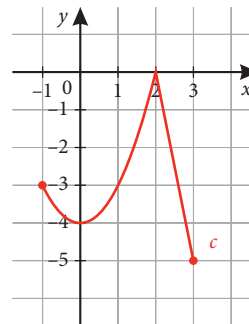
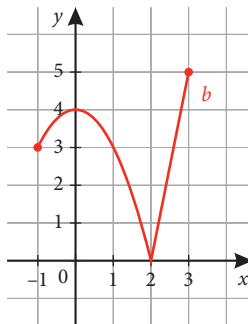
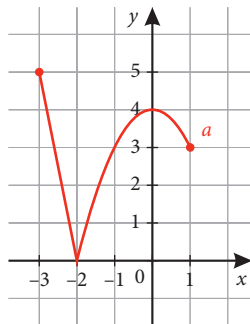
- 3 maximumhelye és 2 minimumhelye legyen;
- 2 maximumhelye és 2 minimumhelye legyen;
- 2 maximumhelye és 1 minimumhelye legyen;
- 1 maximumhelye és 2 minimumhelye legyen;
- 1 maximumhelye és 1 minimumhelye legyen!
- Melyik kérdések azok, amelyekre csak véges számú megoldás van?
- Határozd meg a függvények hozzárendelési szabályát!



# 2. Grafikonjával adtuk meg az $f$ függvényt.

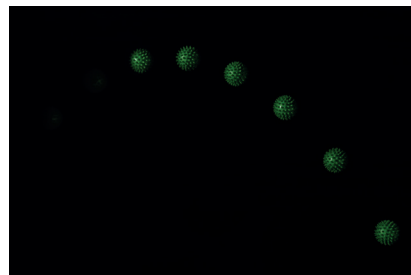


- Határozd meg a függvények értelmezési tartományát, értékkészletét és jellemezd a függvényt szélsőértékek szempontjából!
- Válaszd ki az  $|f|$ ,  $-f$ ,  $| -f |$  és  $-|f|$  függvény grafikonját a megadottak közül!



## BEVEZETŐ

A szökőkútból kiáramló vízszugár, a ferdén kilőtt rakéta, az eldobott labda egymáshoz hasonló pályát írnak le mozgásuk során. Az említett testek pályája (vagyis az a vonal, melyen a test a mozgást végzi) speciális tulajdonságokkal rendelkező görbe, a **parabola**. Ebben a leckében olyan függvényeket vizsgálunk, melyeknek grafikonja ugyancsak parabola.



## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Hogy változik a négyzet területe, ha az oldalak hosszúságát egyre növeljük?

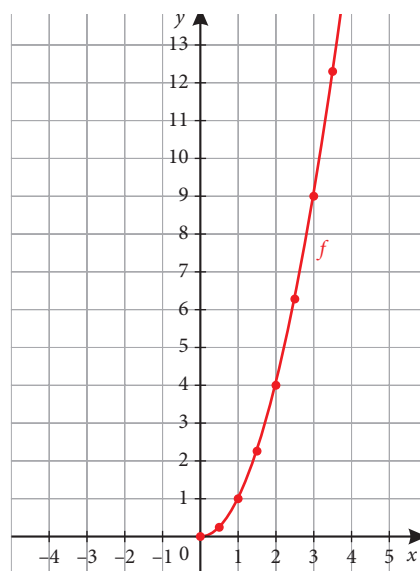
*Megoldás*

Ha egy négyzet oldala  $x$  cm-es, akkor a területe  $x^2$  cm<sup>2</sup>. Itt az  $x$  tetszőleges nemnegatív szám lehet. (Most megengedjük, hogy egy négyzet oldala 0 cm, így területe 0 cm<sup>2</sup> legyen.)

Tehát a változást az a függvény írja le, amelynek az értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza ( $\mathbf{R}_0^+$ ), hozzárendelési szabálya pedig  $x \mapsto x^2$ . Jelöljük ezt a függvényt  $f$ -fel!

Adjunk az  $x$ -nek néhány értéket, készítsünk ehhez a függvényhez táblázatot!

|                                   |      |   |      |   |      |   |       |
|-----------------------------------|------|---|------|---|------|---|-------|
| Oldalhosszúság ( $x$ cm)          | 0,5  | 1 | 1,5  | 2 | 2,5  | 3 | 3,5   |
| Terület ( $x^2$ cm <sup>2</sup> ) | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 | 12,25 |



2. Rajzoljuk meg annak a függvénynek a grafikonját, amely minden valós számhoz a négyzetét rendeli hozzá! Jelöljük ezt a függvényt  $g$ -vel!

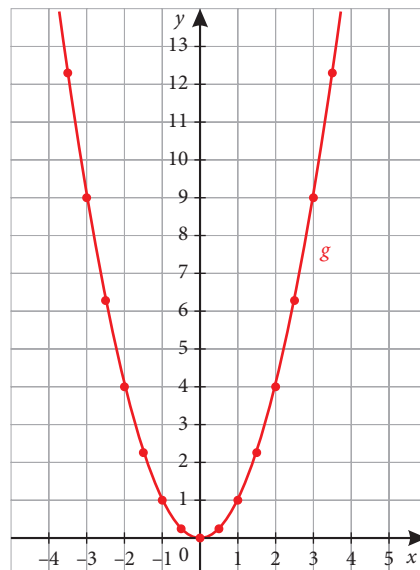
*Megoldás*

Azt a függvényt kell ábrázolnunk, amelynek az értelmezési tartománya a valós számok halmaza ( $\mathbf{R}$ ), hozzárendelési szabálya pedig  $x \mapsto x^2$ . Ez egy **másodfokú függvény**. Az előző és a mostani függvény hozzárendelési szabálya ugyanaz, értelmezési tartományuk azonban különböző.

Az előző feladatban már láttuk, milyen ennek a grafikonnak a nemnegatív számokhoz tartozó része. Készítsünk most olyan táblázatot, amelyben néhány negatív szám szerepel!

|              |      |    |      |    |      |    |       |
|--------------|------|----|------|----|------|----|-------|
| $x$          | -0,5 | -1 | -1,5 | -2 | -2,5 | -3 | -3,5  |
| $g(x) = x^2$ | 0,25 | 1  | 2,25 | 4  | 6,25 | 9  | 12,25 |

A táblázat alapján megrajzoljuk a grafikon 15 pontját. A pontokat összekötjük. Tengelyesen szimmetrikus görbét, egy **parabolát** kaptunk.



**PROJEKTFELADAT:** Járj utána az interneten, hogy milyen nevezetes pont-halmaz a parabola! Gondold végig a megfogalmazott definíció alapján, hogyan tudod megszerkeszteni a parabola pontjait!

## ELMÉLET I.

Az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x^2$  függvény minden valós számhoz a négyzetét rendeli. Ez egy **másodfokú függvény**.

A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza.

$x < 0$  esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő,  $x > 0$  esetén szigorúan monoton növekvő.

A függvény zérushelye  $x = 0$ .

A függvénynek minimuma van. A minimum helye  $x = 0$ , a minimum értéke  $f(0) = 0$ .

A függvénynek nincs maximuma.

Az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x^2$  függvény grafikonja parabola.

A parabola szimmetriatengelyén lévő pontját **tengelypontnak** nevezzük.

Az előző feladat esetében a szimmetriatengely az ordinátatengely, a tengelypont pedig az origó.



A függvények ábrázolásához a *GeoGebra* vagy a *Graph* programot is használhatod.

## FELADAT

**1. a)** Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; f(x) = x^2$  függvény grafikonjára?

$A(-1,1; 1,21)$      $B(0,2; 0,4)$      $C(-1,7; 2,89)$

$D(16; -4)$      $E\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{9}\right)$      $F(-3,3; 9,9)$

**b)** Melyik valós számot rendeli az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x^2$  másodfokú függvény a 32-höz, a -8-hoz, a  $\frac{3}{5}$ -höz?

**c)** Melyik valós számhoz rendeli az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x^2$  másodfokú függvény a 225-öt, a -1,96-ot, a  $\frac{36}{49}$ -et?

**2.** Hány olyan **rácspont** van a derékszögű koordináta-rendszerben, melyre teljesül, hogy

**a)**  $1 \leq x \leq 3$  és  $0 < y \leq x^2$ ;

**b)**  $1 < x < 5$  és  $0 < y \leq x^2$ ;

**c)**  $1 < x \leq 6$  és  $0 < y \leq x^2$ ;

(A rácspont olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész szám.)

## KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Ábrázoljuk azt a függvényt, amely az  $x \text{ m}^2$  ( $x \geq 0$ ) területű négyzethez hozzárendeli a négyzet méterben mért oldal-hosszát!

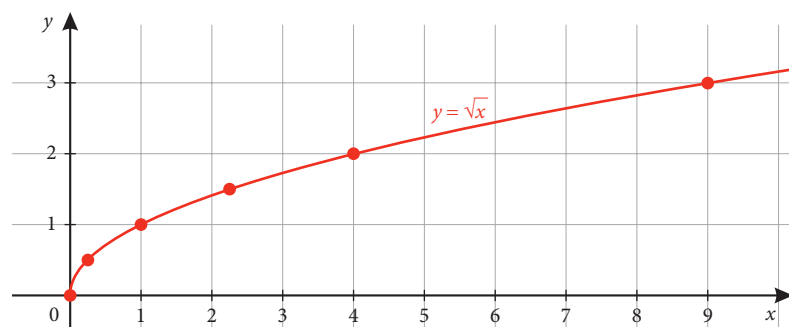
Megoldás

Az  $x \text{ m}^2$  területű négyzet oldala  $\sqrt{x}$  méter hosszúságú, tehát az  $x \mapsto \sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) függvényt kell ábrázolnunk.

Néhány esetben táblázatba foglaljuk az összetartozó számokat:

|                                          |        |             |        |             |        |        |
|------------------------------------------|--------|-------------|--------|-------------|--------|--------|
| $x$                                      | 0      | 0,25        | 1      | 2,25        | 4      | 9      |
| $\sqrt{x}$                               | 0      | 0,5         | 1      | 1,5         | 2      | 3      |
| A grafikonra illeszkedő pont koordinátái | (0; 0) | (0,25; 0,5) | (1; 1) | (2,25; 1,5) | (4; 2) | (9; 3) |

A grafikon:



Szemléletünk és a grafikon is azt mutatja, hogy ez a függvény szigorúan monoton növekvő (két négyzet közül a nagyobb területűnek nagyobb az oldala).

## ELMÉLET II.

**Definíció:** A nemnegatív valós számok halmazán értelmezett  $x \mapsto \sqrt{x}$  hozzárendelési szabállyal megadott függvényt **négyzetgyökfüggvénynek** nevezzük. Jelöléssel:  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$ . (Az  $\mathbb{R}_0^+$  szimbólumot a nemnegatív valós számok halmazának jelölésére használjuk.)

A négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő, értékészlete a nemnegatív valós számok halmaza.

A függvény zérushelye  $x = 0$ .

A függvénynek minimuma van. A minimum helye  $x = 0$ , a minimum értéke  $f(0) = 0$ .

A függvénynek nincs maximuma.

A négyzetgyökfüggvény grafikonja egy olyan parabolának a fele, amelynek a tengelypontja az origó, szimmetriatengelye pedig az abszcisszatengely.

## FELADAT

- 3 a) A megadott pontok közül melyek vannak rajta a négyzetgyökfüggvény grafikonján?  
 $A(4; 16)$ ,  $B(25; 5)$ ,  $C(100; -10)$ ,  $D(0; 0)$ ,  $E(-64; -8)$ ,  $F(3,5; 12,25)$ ,  $G(51,84; 7,2)$
- b) Melyik nemnegatív számhoz rendel a négyzetgyökfüggvény 0-t, 2,8-et, 5,1-et, illetve 12-t?
- c) Melyik számot rendel a négyzetgyökfüggvény a 0-hoz, a 2,8-hez, az 5,1-hez, illetve a 12-höz?

4. Határozd meg, melyik két egész szám közé esik  $\sqrt{19}$ ;  $\sqrt{57}$ ;  $\sqrt{93}$  értéke! Indokold válaszod a négyzetgyökfüggvény tulajdonságainak ismeretében! Melyik tulajdonságot használtad?

5. Hány olyan pozitív koordinátájú rácspont van a derékszögű koordináta-rendszerben, melyre teljesül, hogy

- a)  $1 \leq x \leq 4$  és  $y \leq \sqrt{x}$ ;  
 b)  $1 < x < 7$  és  $y \leq \sqrt{x}$ ;  
 c)  $0 \leq x \leq 10$  és  $y \leq \sqrt{x}$ ?

## KIDOLGOZOTT FELADAT

4. a) Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$  és  $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x}$  függvények grafikonját!

- b) Add meg néhány, az  $f$  és  $g$  függvény grafikonjára illeszkedő pont koordinátáit!

Az  $f$  függvény grafikonjára illeszkedik például:

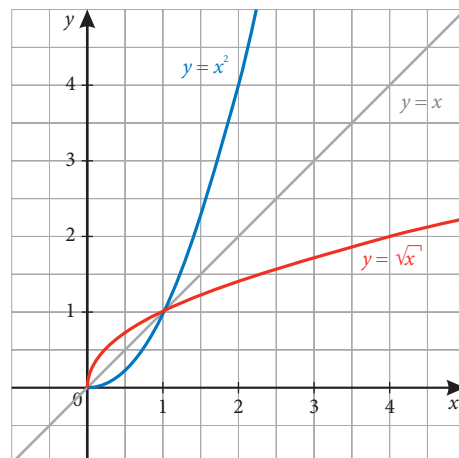
$F_1(0; 0)$ ,  $F_2(1; 1)$ ,  $F_3(2; 4)$ , ezen pontok koordinátái az ábráról leolvashatók;

$F_4(1,3; 1,69)$ ,  $F_5(7; 49)$ ,  $F_6(33; 1089)$ , ezen pontokról számolással igazolható az illeszkedés.

A  $g$  függvény grafikonjára illeszkedik például:

$G_1(0; 0)$ ,  $G_2(1; 1)$ ,  $G_3(4; 2)$ , ezen pontok koordinátái az ábráról leolvashatók;

$G_4(1,69; 1,3)$ ,  $G_5(49; 7)$ ,  $G_6(1089; 33)$ , ezen pontokról számolással igazolható az illeszkedés.



- c) Milyen különleges kapcsolatot veszel észre az  $f$ , valamint  $g$  függvény grafikonjára illeszkedő pontok koordinátái között?

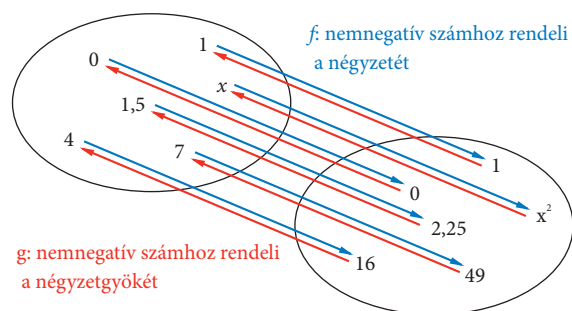
Ha egy pont rajta van az  $f$  függvény grafikonján, akkor a koordinátái felcserélésével adódó pont illeszkedik a  $g$  függvény grafikonjára, és ez fordítva is igaz.

Például:

$F_4(1,5; 2,25)$  rajta van az  $f$  függvény grafikonján, mert  $1,5$ -hez a négyzetét rendeli, ami  $1,5^2 = 2,25$ . A koordináták felcserélésével kapott  $(2,25; 1,5)$  koordinátájú pont illeszkedik a  $g$  függvény grafikonjára, mert  $2,25$ -hoz a négyzetgyökét rendeli, és  $\sqrt{2,25} = 1,5$ .

Belátható az is, hogy az  $f$  és a  $g$  függvények grafikonjai tengelyesen szimmetrikusak a  $y = x$  függvény grafikonjára nézve – amint az ábra mutatja.

- d) Ábrázoljuk Venn-diagram segítségével az  $f$ , valamint  $g$  függvénynek megfelelő hozzárendelést!



## HÁZI FELADAT

- 1.** Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2$  függvény, illetve a  $g: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \sqrt{x}$  függvény grafikonjára?

$$A(-6; 36) \quad B(25; -5) \quad C(-2,2; 4,84)$$

$$D(0,01; 0,1) \quad E(-\frac{1}{25}; 0,2) \quad F(\frac{81}{16}; -2,25)$$

$$G(\frac{2}{5}; 0,16)$$

- 2.** a) Ábrázold a derékszögű koordináta-rendszerben az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x - 2$  függvény grafikonját!
- b) Add meg az  $f$  függvény grafikonjának két különböző pontját koordinátaival (legyenek ezek  $P$  és  $Q$  pontok), majd írd le a koordináták felcserélésével kapott pontokat a koordinátáikkal (legyenek ezek  $P'$  és  $Q'$  pontok)!

- c) Írd fel annak a lineáris  $g$  függvénynek a hozzárendelési szabályát, melyet a b) részben létrehozott  $P'$  és  $Q'$  pontok határoznak meg!

- d) Ábrázold a c) feladatban felírt  $g$  függvény grafikonját is ugyanabban a koordináta-rendszerben! Milyen összefüggést figyelsz meg az  $f$  és a  $g$  grafikonja között?

- 3.** Ábrázold az  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2$  függvény, illetve a  $g: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \sqrt{x}$  függvény grafikonját a koordináta-rendszerben!

Képezd az adott függvények abszolút értékét! Milyen kapcsolatot veszel észre a függvények és abszolút értékeik között? Mi lehet ennek a magyarázata?

## RÁADÁS

- 1.** Melyik a nagyobb?

A pozitív számokon értelmezett  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény szigorúan monoton növekedő. Vajon mit mondhatunk monotonitás szempontjából a pozitív számokon értelmezett  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  függvényre?

Legyen  $x_1$  és  $x_2$  két pozitív valós szám, melyre  $0 < x_1 < x_2$ .

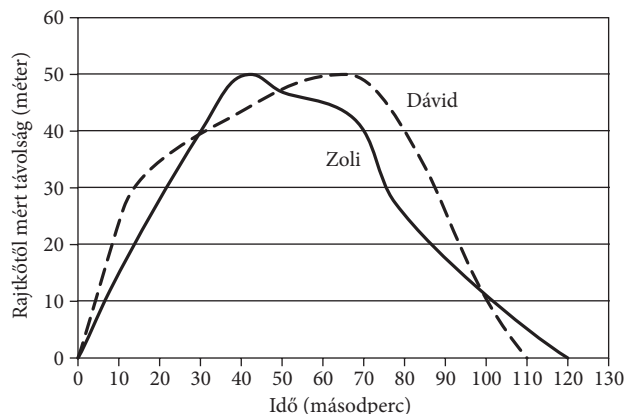
Melyik a nagyobb a következő kifejezések közül? Ha a nagyobb értékhez tartozó betűket helyes sorrendbe rakod, akkor egy világhírű magyar sportoló, ötszörös olimpiai bajnok vezetéknevét kapod. Ki ő?

|   |                                     |      |                                     |   |
|---|-------------------------------------|------|-------------------------------------|---|
| V | $\sqrt{x_1}$                        | vagy | $\sqrt{x_2}$                        | R |
| E | $\frac{1}{\sqrt{x_1}}$              | vagy | $\frac{1}{\sqrt{x_2}}$              | C |
| S | $-\sqrt{x_1}$                       | vagy | $-\sqrt{x_2}$                       | Y |
| H | $(\sqrt{x_1})^2$                    | vagy | $(\sqrt{x_2})^2$                    | E |
| T | $\sqrt{x_1} - 1$                    | vagy | $\sqrt{x_2} - 1$                    | I |
| G | $1 - \sqrt{x_1}$                    | vagy | $1 - \sqrt{x_2}$                    | M |
| E | $\frac{\sqrt{x_1} + 1}{\sqrt{x_1}}$ | vagy | $\frac{\sqrt{x_2} + 1}{\sqrt{x_2}}$ | Á |
| N | $1 - \frac{1}{\sqrt{x_1}}$          | vagy | $1 - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$          | G |
| A | $(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2$       | vagy | $(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})^2$       | Z |



**2.** (Kompetenciamérés, 2017)

Egy sportuszoda 50 méteres medencéjében úszóversenyt rendeztek. 100 méteres úszásnál a versenyzők féltávnál elérik a medence szemközti falát, majd megfordulnak, és visszaúsznak a rajtkőhöz. Az alábbi diagram Dávid és Zoli úszását mutatja egy 100 m-es távon.



Mi történt az 50. másodpercben?

- A Zoli megelőzte Dávidot.
- B Dávid megelőzte Zolit.
- C Egymás mellett úsztak.
- D Egymással szemben úsztak.

**3.** Hány olyan pozitív koordinátájú rácspont van a derékszögű koordináta-rendszerben, melyre teljesül, hogy  $1 \leq x \leq 2020$  és  $y \leq x^2$ ?

A feladat megoldásában segít, ha használod az **első  $n$  négyzetszám összegére** felírt alábbi összefüggést:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ ahol } n \in \mathbb{Z}^+.$$

**4.** Adott egy függvény az alábbi hozzárendelés szerint:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

- a) Ábrázold a függvény grafikonját a koordináta-rendszerben!
- b) Határozd meg a függvény értékkészletét, zérushelyét, szélsőértékeinek helyét és értékét!
- c) Jellemezd a függvény monotonitását!
- d) A fenti hozzárendelés neve szignumfüggvény.

Jelölése  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{sgn} x$ .

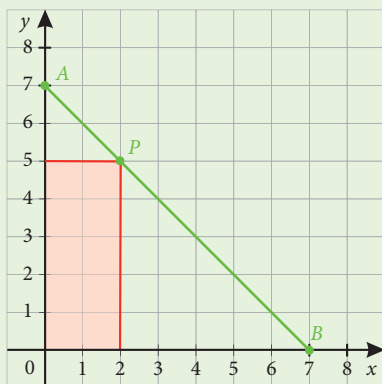
Járj utána, miért nevezik így a függvényt, mi a signum (szignum) szó jelentése!

## FELADAT

**1** A Spedor nevű fuvarozó cég a következő képlettel számítja ki a szállítási díjat egy teherautó igénybevétele esetén:  $f(x) = 2,5x + 8$ . A képletben  $x$  jelöli a szállítás során megtett utat km-ben ( $x \geq 0$ ),  $f(x)$  pedig az érte fizetendő összeget tallérban.

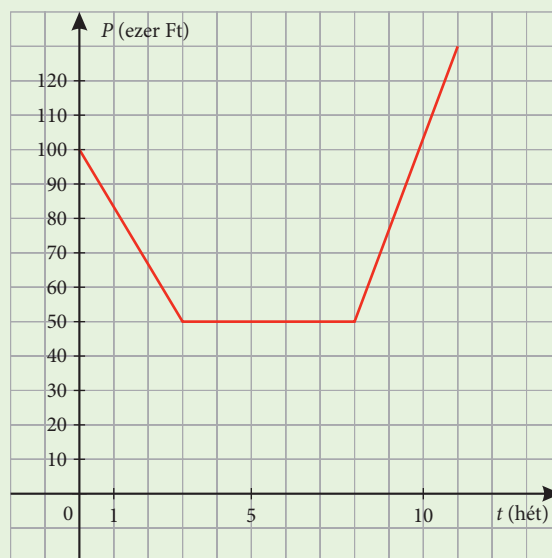
- Hány tallérba kerül a szállítás 12 km távolságra [azaz mennyi az  $f(12)$ ]?
- Mennyi a kiállási díj (amit a megrendelőnek akkor is meg kell fizetnie, ha végül nem veszi igénybe a szolgáltatást)?
- Hány km-t számlázott a Spedor, ha 53 tallért kellett fizetnünk?
- Ábrázold az  $f: x \mapsto 2,5x + 8, x \geq 0$  függvényt!
- A Padlógáz nevű konkurens szállítócég így adja meg az ajánlatát: egy teherautó igénybevétele esetén, ha  $x$  km a megtett út, akkor az érte fizetendő összeg  $3x$  tallér. Mekkora távolságok esetén kedvezőbb a Padlógáz ajánlata?

**2**  $A(0; 7)$ ,  $B(7; 0)$ , és a  $P$  pont az  $AB$  szakasz pontja.



- Írd fel azt a hozzárendelési szabályt, amellyel a zöld grafikon pontjait jellemezhetjük!
- Ha  $P$  első koordinátája  $x$ , akkor a második koordinátája az a) pontban talált szabállyal felírható. Írd fel ekkor a rózsaszín téglalap területét!
- Jelöld ki az  $AB$  szakaszon lévő valamennyi rácsponthoz segítségével létrehozható téglalapot, és számítsd ki ezek területét! Melyik téglalap a legnagyobb területű az előbbieket közül?

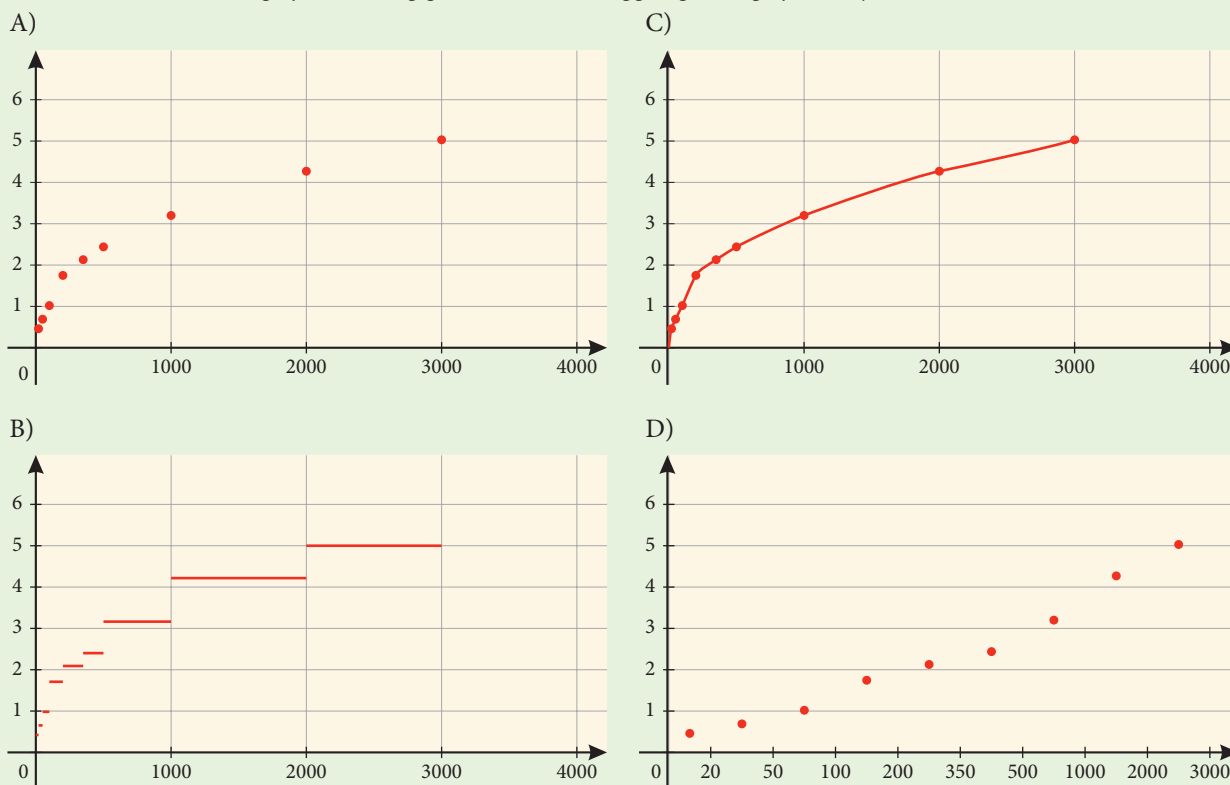
**3** A grafikon egy bankszámlán lévő összeg alakulását mutatja az idő függvényében.



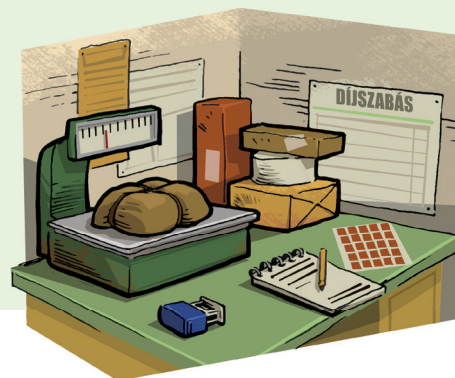
- Mekkora a hetenkénti növekedés az utolsó szakaszban?
  - Mi az itt szereplő függvény értelmezési tartománya, értékkészlete és hozzárendelési szabálya?
  - Lineáris-e a bankszámlán lévő összeg és a szám-lára helyezés óta eltelt idő kapcsolata?
- 4** Zedországban a postai díjak a küldemények tömegétől függnek a mellékelt táblázat szerint:

| Tömeg (egész grammra kerekítve) | Díj      |
|---------------------------------|----------|
| 20 g-ig                         | 0,46 zed |
| 21 g–50 g                       | 0,69 zed |
| 51 g–100 g                      | 1,02 zed |
| 101 g–200 g                     | 1,75 zed |
| 201 g–350 g                     | 2,13 zed |
| 351 g–500 g                     | 2,44 zed |
| 501 g–1000 g                    | 3,20 zed |
| 1001 g–2000 g                   | 4,27 zed |
| 2001 g–3000 g                   | 5,03 zed |

- a) Az alábbi grafikonok közül melyik mutatja legjobban a postai díjszabást Zedországban?  
(A vízszintes tengelyen a tömeg grammokban, a függőleges tengelyen a díj zedben van ábrázolva.)



- b) Gyurka két levelet akar küldeni (Zedországból) egy barátjának. A levelek tömege 40 g, illetve 80 g. A zedországi posta díjszabása alapján dönts el, melyik esetben kell kevesebbet fizetnie Gyurkának: ha egy borítékban adja postára a két levelet, vagy ha külön-külön adja postára őket! Támasd alá számolással az állításodat!



## HÁZI FELADAT

1. Egy vidámparkban különösen kedvelt a sárkányrepülő. Két cimbora közül az egyik 15 menetért és a belépőért fizetett összesen 1600 forintot, a másik 18 menetért és a belépőért összesen 1840 forintot.
  - a) Mennyi egy menet ára, és mennyi a belépődíj?
  - b) Add meg a menetszám-összköltség összefüggést!
  - c) Mennyit kellene fizetnünk 8 menetért?
  - d) Hány menetre lenne elég 2000 forint?
  - e) Igaz-e, hogy a menetszám és az összköltség kapcsolata lineáris?
2. Egy tartályban a töltőanyag mennyisége az időnek lineáris függvénye. Ha a gyártási folyamat kezdetétől eltelt idő  $x$  óra, akkor a töltőanyag mennyisége  $y$  kilogramm. A kettő közötti kapcsolat:  $y = 500 - 2,5x$ . Jelenítsd meg koordináta-rendszerben a kapcsolatot!
  - a) Hány kilogramm töltőanyag fogy óránként?
  - b) Mennyi idő alatt ürül ki a tartály?
  - c) A gyártási folyamat indulása után mennyi idővel lesz a tartályban levő töltőanyag mennyisége 150 kilogramm?

## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Sári a piacon madáreledelt vett. Ennek 30%-a fénymag. Ezt az arányt szeretné Sári 50%-ra növelni. Mennyi fénymagot tegyen a piacon vásárolt 40 dkg magkeverékhez?

## Megoldás

Legyen a szükséges fénymag tömege  $x$  dkg. Ha ezt Sári a piacon vásárolt madáreledelhez önti, akkor a keverék tömege  $(40 + x)$  dkg lesz, ennek a fele  $0,5(40 + x)$  dkg fénymag.

A megvásárolt 40 dkg madáreledelben  $40 \cdot 0,3 = 12$  dkg fénymag volt, ehhez jött még  $x$  dkg. Ezért összesen  $(12 + x)$  dkg fénymag lesz a keverékben.

Tehát  $0,5(40 + x) = 12 + x$ ;  $20 + 0,5x = 12 + x$ .

Oldjuk meg ezt az egyenletet!

## Első (algebrai) módszer

$$20 + 0,5x = 12 + x \quad / -12 - 0,5x$$

$$8 = 0,5x \quad / \cdot 2$$

$$16 = x$$

Tehát 16 dkg fénymagot kell Sárinak a piacon vásárolt keverékhez öntenie.

## Ellenőrzés

Ha Sári a 40 dkg magkeverékhez 16 dkg fénymagot önt, akkor 56 dkg magkeveréket kap. Ebben összesen  $12 + 16 = 28$  dkg fénymag van, és ez valóban 50%-a az 56 dkg-nak.

## Második (grafikus) módszer

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben az  $x \mapsto 20 + 0,5x$  és az  $x \mapsto 12 + x$  függvény grafikonját!



Ez a két grafikon a  $(16; 28)$  pontban metszi egymást.

A metszéspont **első koordinátája** a  $20 + 0,5x = 12 + x$  egyenlet gyöke:  $x = 16$ .

Ugyanazt az eredményt kaptuk, amit az első módszerrel.

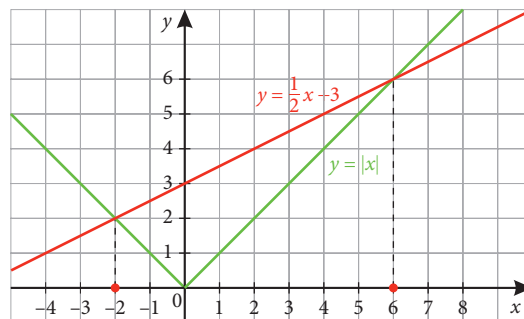
Az ellenőrzést ebben az esetben is a szöveg alapján végezzük.

2. Melyek azok a számok, amelyek esetében

$$|x| = \frac{1}{2}x + 3?$$

## Megoldás

Rajzoljuk meg közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett  $x \mapsto |x|$  és az  $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$  függvény grafikonját!



Az ábráról leolvashatjuk, hogy a két grafikon két pontban metszi egymást. Ennek a két pontnak az **első koordinátája** az adott egyenlet két gyöke. A jobb oldali metszéspont első koordinátája 6, a bal oldali pedig  $-2$ .

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy

$$|6| = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 \text{ és } |-2| = \frac{1}{2} \cdot (-2) + 3 \text{ is igaz, tehát az adott}$$

egyenletnek két gyöke van: a  $-2$  és a  $6$ .

Az egyenlet **megoldáshalmaza**:  $\{-2; 6\}$ .



## ELMÉLET

Az egyenletek megoldását **grafikus módszerrel** is elvégezhetjük.

Az egyenlet két oldalán lévő kifejezést egy-egy függvénynek tekintjük, és közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk azokat. Az egyenlet **megoldását** a két függvénygrafikon **metszéspontjának**, illetve **metszéspontjainak első koordinátája** adja meg. Az egyenlet ellenőrzése során a két függvény – az egyes metszéspontok első koordinátájával számolt – helyettesítési értékének egyenlősége adódik. Ez a közös helyettesítési érték épp a kérdéses metszéspont második koordinátája.

A módszer előnye, hogy olyan egyenletek is megoldhatók a segítségével, melyeket algebrai úton nem vagy csak hosszadalmasan tudnánk megoldani.

A módszer hátránya, hogy nem minden esetben lehet pontosan meghatározni a megoldást, mert előfordulhat, hogy a metszéspont első koordinátáját csak közelítőleg tudjuk leolvasni.

## FELADAT

**1.** Oldd meg grafikus módszerrel a következő egyenleteket!

a)  $x - 1 = \frac{1}{2}x + 5$

b)  $|x| = x + 2$

c)  $x^2 = |x|$

d)  $x^2 = 3x + 4$

**2.** Oldd meg az egyenleteket grafikus úton! Ellenőrizd az eredményeket behelyettesítéssel!

a)  $|1 - 3x| = 3 - x$

b)  $\left|\frac{7}{5}x + 5\right| = 2x + 1$

**3.** Egy hordóban 16 liter víz van. Ha a dugaszt eltávolítják, akkor percenként 2 liter víz folyik ki belőle. Egy másik hordóban 1 liter víz van, és ezt olyan csappal töltik fel, mely percenként 3 liter vizet pótol. Mennyi idő múlva lesz a két hordóban ugyanannyi víz, ha egyszerre kezdik el a hordók kiürítését, illetve feltöltését? Oldd meg a feladatot többféle módszer segítségével!

## HÁZI FELADAT

**1.** Oldd meg grafikus módszerrel!

a)  $2x + 3 = |x|$

b)  $x^2 = 2x + 3$

**2.** Oldd meg grafikusán az egyenleteket!

a)  $|2 - 3x| = 4 - x$

b)  $|3 - 2x| = x^2$

**3.** Két pók függőlegesen, állandó sebességgel ereszkedik lefelé egy épület falán. Az egyik 320 cm magasan van, és 8 másodperc alatt tud leereszkedni a talajra, a másik 240 cm magasságból indul, és 12 másodperc alatt éri el a talajszintet. Mikor lesznek azonos magasságban, ha egyszerre indulnak?

## RÁADÁS

**1.** Oldd meg az egyenletet grafikus úton a valós számok halmazán!

a)  $|x + 6| = |3x + 2|$

b)  $|4 - 2x| = \left|\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right|$

**2.** A következő egyenletben  $p$  és  $q$  valós számok. Az egyenlet a valós számok halmazán van értelmezve, és megoldáshalmaza:  $\{-3; 2\}$ . Milyen valós számokat jelölnek  $p$  és  $q$ ?

$|2x - 1| = px + q$

## BEVEZETŐ

Hány évesek lehetnek az ötös ikrek, ha tudjuk, hogy 12 év múlva sem éri el az életkoruk összege a 100-at?

*Megoldás*

Ha most  $x$  évesek, akkor 12 év múlva  $x + 12$  évesek lesznek, az életkoruk összege pedig 5-ször ennyi lesz. A feladat szerint  $5(x + 12) < 100$ . Egy egyenlőtlenséget kaptunk, amelyet a mérlegelvvel oldunk meg:

$$\begin{aligned} 5(x + 12) &< 100 & / : 5 \\ x + 12 &< 20 & / - 12 \\ x &< 8 \end{aligned}$$

Eredményünk azt mutatja, hogy az ikrek még nem érték el a 8 évet.

*Ellenőrzés*

Ha most 8 évesek lennének, akkor 12 év múlva az életkoruk összege  $5 \cdot 20 = 100$  lenne. Ha pedig már most 8 évesnél idősebbek lennének, akkor ez az összeg 100-nál nagyobb szám lenne.



## ELMÉLET

Az egyenlőtlenségek megoldására is használhatjuk a **mérlegelvet**. Ez azt jelenti, hogy

**az egyenlőtlenség megoldásainak a halmaza nem változik meg**, ha a  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  jel két oldalán álló kifejezést (számot)

- ugyanannyival növeljük vagy csökkentjük,
- ugyanazzal a pozitív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk,
- ugyanazzal a negatív számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, és **ezzel egy időben** a  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ , illetve  $\geq$  jelet az ellenkezőjére változtatjuk.

Tehát a negatív számokkal való szorzás és osztás esetében különösen figyelniünk kell. Nyilvánvaló, hogy ilyenkor meg kell fordítanunk a jelet, mert például

$$\begin{aligned} 3 &< 8, & \text{de} & \quad -3 > -8; \\ -5 &< 1, & \text{de} & \quad 5 > -1; \\ -9 &< -6, & \text{de} & \quad 9 > 6; \end{aligned}$$

vagyis a  $(-1)$ -gyel való szorzás megfordítja a nagyságviszonyokat. Ugyanez a helyzet az osztással is. Ha lehetséges, rendezzük úgy az egyenlőtlenséget, hogy ne kelljen negatív számmal osztanunk vagy szoroznunk. Még jobban kell figyelni az egyenlőtlenség megoldása során, ha ismeretlent tartalmazó kifejezéssel szorozzuk vagy osztjuk mindkét oldalt!

## FELADAT

**1.** Oldd meg az egyenlőtlenségeket a mérlegelv alkalmazásával!

**a)**  $-23 - 8x < -15(-7 - 8x)$

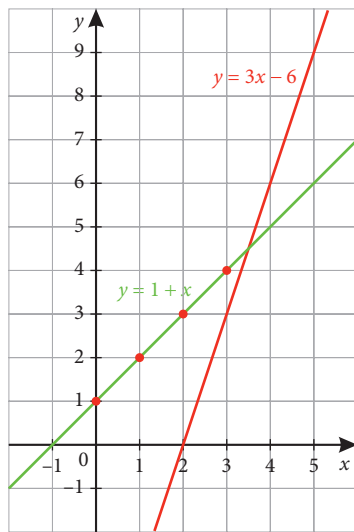
**b)**  $5(x + 2)^2 - 8x \geq 5x^2 + 12x$

**c)**  $\frac{3-5x}{5} - \frac{5-4x}{10} \geq -\frac{7}{20}$



## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. A grafikon alapján döntjük el, melyik természetes számokra igaz, hogy  $1 + x \geq 3x - 6$ !



### Megoldás

Olyan pontokat kell keresnünk az  $y = 1 + x$  egyenletű egyenesen, amelyeknek **első koordinátája** természetes szám, és amelyekhez legalább akkora **második koordináta** tartozik, mint az  $y = 3x - 6$  egyenes megfelelő pontjaihoz. Négy ilyen pont van:

(0; 1), (1; 2), (2; 3) és (3; 4).

Tehát az  $\mathbb{N}$  alaphalmazon az  $1 + x \geq 3x - 6$  egyenlőtlenség megoldáshalmaza:  $\{0; 1; 2; 3\}$ .

### Megjegyzés

Az  $1 + x \geq 3x - 6$  egyenlőtlenséget algebrai úton is megoldhatjuk. A mérlegelvet használjuk:

$$1 + x \geq 3x - 6 \quad / -3x - 1$$

$$-2x \geq -7 \quad / : (-2)$$

$$x \leq 3,5.$$

Az utolsó lépésnél a  $\geq$  jelet  $\leq$ -re változtattuk. Azt kaptuk, hogy az  $x$  természetes számnak 3,5-nél kisebbnek kell lennie. Négy ilyen természetes szám van: a 0, az 1, a 2 és a 3.

2. Van-e olyan, legfeljebb 21 cm kerületű háromszög, amelynek oldalai (cm-ben mérve)  $x$ ,  $x + 4$  és  $x + 8$  hosszúak?

### Megoldás

A kívánt tulajdonságú háromszög létezéséhez három feltételnek kell teljesülnie:

$x > 0$  és  $x + (x + 4) + (x + 8) \leq 21$  (a kerület miatt) és

$x + 8 < x + (x + 4)$  (a háromszög-egyenlőtlenség miatt).

Meg kell oldanunk a következő egyismeretlens **egyenlőtlenség-rendszert**:

$x > 0$  és  $3x + 12 \leq 21$  és  $x + 8 < 2x + 4$ .

A második egyenlőtlenséget mérlegelvvel megoldva:  $x \leq 3$ .

A harmadik egyenlőtlenséget mérlegelvvel megoldva:  $4 < x$ .

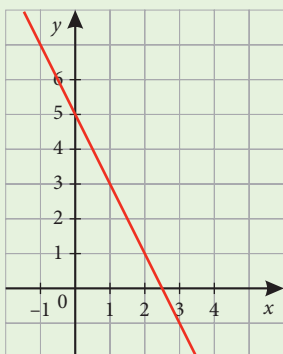
Olyan pozitív szám azonban nincs, amelynél egyszerre teljesülne az, hogy 3-nál nem nagyobb, 4-nél viszont nagyobb.

**Nincs** tehát a szövegnek megfelelő háromszög.

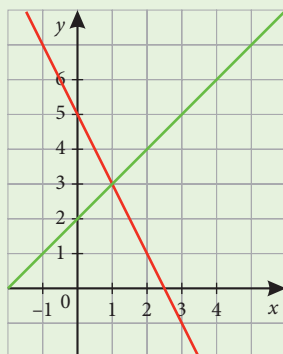
## FELADAT

2. A grafikonok segítségével oldd meg az egyenlőtlenségeket a természetes számok halmazán, majd a valós számok halmazán is!

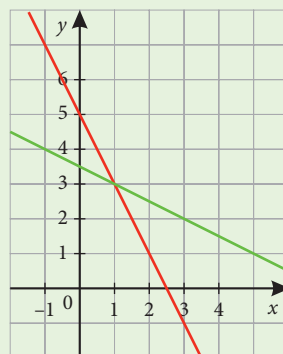
a)  $0 \leq 5 - 2x$



b)  $x + 2 \leq 5 - 2x$



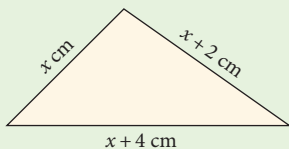
c)  $5 - 2x > 3,5 - 0,5x$



d)  $\frac{-x - 1}{4} \leq 5 - 2x$



3. Hány olyan, legfeljebb 21 cm területű háromszög létezik, amelynek oldalai (cm-ben mérve)  $x$ ,  $x + 2$  és  $x + 4$  hosszúak? Hány olyan van ezek között, amelyekre  $x \in \mathbb{N}$ ?



4. Szociális segély igénylésekor a jogosultság egyik feltétele az egy főre jutó jövedelem. A család „létszámát” így határozzák meg: igénylő 1,2, igénylő

házastársa 0,9, gyerekenként 0,8. (Tehát egy 3 fős család „létszáma”:  $1,2 + 0,9 + 0,8 = 2,9$ .) A család akkor részesülhet szociális segélyben, ha a család összjövedelmének és a család fentebb leírt módon kiszámított „létszámának” hányadosa nem haladja meg a 26 500 tallért.

Az egyik igénylőnek és házastársának két gyermeke volt, és csak a harmadik gyermekük megszületése után váltak jogosulttá a szociális segélyre. Mennyi lehetett a család összjövedelme eredetileg, ha a bevételük – a harmadik gyermek megszületése után – még a 3. gyermek után járó 13 000 taller családi pótlékkal megnőtt?

## HÁZI FELADAT

1. Juditnak biológiából öt osztályzata van, ezek átlaga 3,8. Hány ötöst kell szereznie, hogy az átlaga 4,3-nél nagyobb legyen?



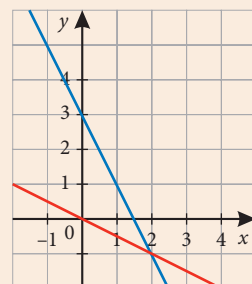
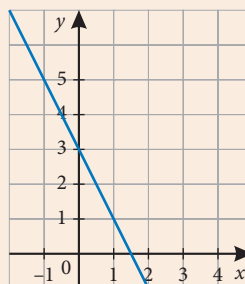
2. Oldd meg az egyenlőtlenség-rendszereket a valós számok halmazán!

- a)  $5 - x < 0$  és  $x - 8 \leq 0$   
 b)  $5 - 4x \geq 7$  és  $\frac{x+3}{2} \geq 0$   
 c)  $\frac{4x+5}{9} < 1$  és  $\frac{14-3x}{4} < x$

3. Oldd meg az egyenlőtlenségeket a grafikonok segítségével a valós számok halmazán!

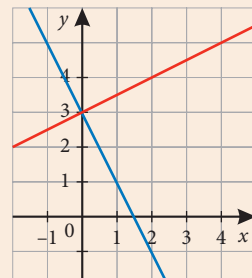
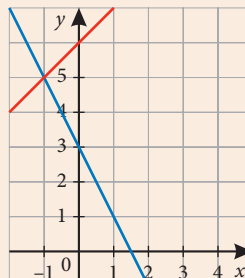
a)  $0 \geq 3 - 2x$

c)  $3 - 2x > -0,5x$



b)  $3 - 2x < 6 + x$

d)  $\frac{x+6}{2} \leq 3 - 2x$

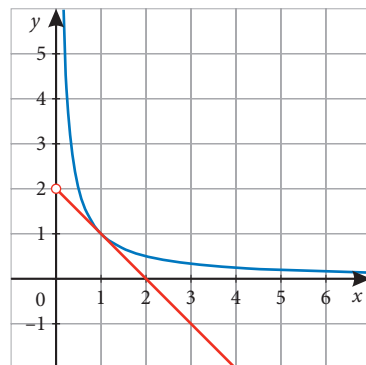


## EMELT SZINT

**Tétel:** Egy pozitív számnak és reciprokának összege nem kisebb, mint 2, vagyis minden  $x \in \mathbb{R}^+$  esetén fennáll, hogy  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ . Az egyenlőség csak  $x = 1$  esetén teljesül.

Vizsgáljuk meg a tétel állítását grafikus megközelítésből!

1. Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezésnek megfelelő függvényt nem tudjuk ábrázolni az eddig tanult elemi módszerekkel. A megoldáshoz készítsd el a függvény grafikonját *függvényábrázoló program*, például *Geogebra* segítségével! Állapítsd meg a kapott függvény értékkészletét!
2. Mivel a bal oldalon álló kifejezést nem tudjuk elemi úton függvényként ábrázolni, ezért az eredeti egyenlőtlenséggel egyenértékű (**ekvivalens**), átrendezés után kapott  $\frac{1}{x} \geq 2 - x$  alakot használjuk. Tekintsük a bal és jobb oldali kifejezések alapján az  $f(x) = \frac{1}{x}$ , valamint  $g(x) = 2 - x$  függvényeket a pozitív számok halmazán, és ábrázoljuk őket.



Az ábra alapján azt sejtethetjük, hogy a két grafikonnak egyetlen közös pontja van (a piros félegyenes érinti a kék görbét). A két grafikon közös pontjának első koordinátája:  $x = 1$ , mely esetén  $f(x) = g(x)$ . (Ezt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.) Bármely más pozitív valós  $x$  érték esetén teljesül, hogy  $f(x) > g(x)$ .

Bizonyítsuk be a tétel állítását algebrai úton!

3. Az egyenlőtlenség a mérlegelv segítségével és algebrai átalakításokkal a következő módon írható fel:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &\geq 2 \\ x + \frac{1}{x} - 2 &\geq 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 1}{x} &\geq 0 \\ \frac{(x - 1)^2}{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán álló tört nevezője a feltétel szerint pozitív. A számlálóban álló kifejezés teljes négyzet, mely bármely valós szám esetén nemnegatív, és a 0-val való egyenlőség csakis az  $x = 1$  esetén áll fenn.

A számláló és nevező lehetséges előjelei miatt a tört értéke nemnegatív.

Az utolsó sorban kapott egyenlőtlenség tehát igaz bármely pozitív valós  $x$  esetén, ezért igaz a vele ekvivalens eredeti állításban megfogalmazott egyenlőtlenség is. (Az eredeti egyenlőtlenségből ekvivalens átalakításokkal jutottunk a végső egyenlőtlenséghez, így a gondolatmenet visszafelé is helytálló.)

Ezzel beláttuk a tételt.

## FELADAT

1. Milyen  $(x; y)$  pozitív valós számpárok teljesítik az  $y + \frac{1}{y} = 2 - x^2$  egyenlőséget?
2. Hány  $(x; y)$  valós számpár esetén teljesül az  $y^2 + \frac{1}{y^2} = 1 - 2x - x^2$  egyenlőség?

## FELADAT

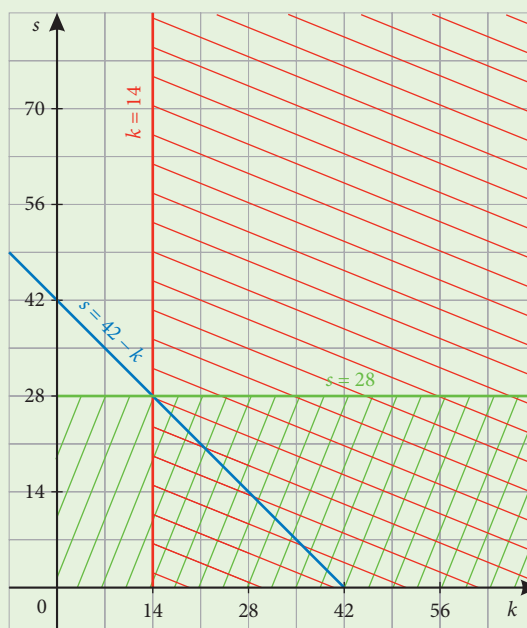
1. Egy kisebb cég fennállásának 10. évfordulójára ünnepséget szervez. A cégvezetés úgy dönt, hogy az ünnepi vacsorán egy-egy vidám ajándéktárgygal meglepi a 42 alkalmazottat. Az ajándékokat 130 000 Ft-os keretből szeretnék megoldani. Kétféle ajándéktárgy merült fel: egy 2800 Ft-os nyaklánc és egy 3500 Ft-os határidőnapló. Annak a 14 alkalmazottnak, akik a forgalmazással foglalkoznak, mindenképpen naplót szeretnének adni. Hány nyakláncot és hány határidőnaplót vehetnek a 130 000 Ft-ból?



- a) Figyeld meg az egyenletet és az egyenlőtlenségeket! Mit jelenthetnek a betűk? Mit jelentenek az egyenlőtlenségek? Mit jelentenek a koordináta-rendszerben bejelölt részek?

$$k + s = 42; \quad k \geq 14;$$

$$0 \leq s \leq 28; \quad 3,5k + 2,8s \leq 130.$$



- b) Gondold végig a feladatot úgy is, hogy csak egy ismeretlent vezetünk be!  
Ha  $k$  db határidőnaplót veszünk, akkor  $42 - k$  db nyakláncra lesz szükség.  
Írd fel, hogy ezek mennyibe kerülnek összesen!
- c) A teljes költség nem lehet több 130 ezer forintnál. Mennyi lehet ekkor a  $k$ ?
- d) Hányféle megoldás jöhet szóba, ha az összes feltételt figyelembe veszed?



1. Az állatkertbe 5290 Ft a „családi” jegy (két felnőtt és két gyerek részére). Minden további gyerek után 890 Ft-ot kell fizetni.

Mekkora létszámú gyerekcsoportot vigyen két óvónő az állatkertbe, hogy (az óvónőket is beleértve) az egy főre jutó jegyár 1000 Ft-nál kevesebb legyen?



*Megoldás*

Két óvónő és két gyerek bemehet a családi jeggyel.

Jelöljük a további gyerekek számát  $x$ -szel.

Ekkor a teljes fizetendő összeg

$4 + x$  fő után  $5290 + 890x$  Ft.

Az egy főre jutó rész:  $\frac{5290 + 890x}{4 + x}$ . Ennek kell 1000 Ft-nál

kevesebbnek lennie.

Meg kell tehát oldanunk az  $\frac{5290 + 890x}{4 + x} < 1000$  egyenlőtlenséget a **természetes számok halmazán**.

Az  $x + 4$  **ebben az esetben** pozitív, ezért **nem fordul meg a relációs jel**, ha megszorozzuk vele az egyenlőtlenség mindkét oldalát.

$$\begin{aligned} \frac{5290 + 890x}{4 + x} &< 1000 && / \cdot (4 + x) \\ 5290 + 890x &< 4000 + 1000x && / - 5290 \\ 890x &< -1290 + 1000x && / - 1000x \\ -110x &< -1290 && / : (-110) \\ x &> 11,73 \end{aligned}$$

Tekintve, hogy a gyerekek száma természetes szám, a megoldás  $x \geq 12$ , tehát összesen legalább  $12 + 2 = 14$  gyerekkel kell menniük.

*Ellenőrzés*

A 16 belépőért fizetett összeg:

$5290 + 12 \cdot 890 = 15\,970$  Ft.

Ez kevesebb 16 000 forintnál, így az egy főre jutó jegyár valóban kevesebb 1000 Ft-nál.

*Megjegyzés*

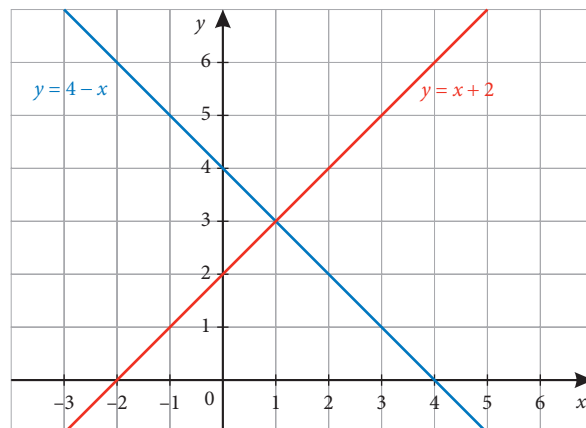
Ekkora csoportnak már érdemes csoportos belépőt rendelni. Ezt ugyan korábban kell elintézni, viszont jóval olcsóbb.

2. Oldjuk meg az  $(x + 2)(4 - x) > 0$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Egy kéttényezős szorzat pontosan akkor pozitív, ha mindkét tényező pozitív vagy negatív. Vizsgáljuk ezért mindkét tényező előjelét.

*Első megoldás (grafikus módszer)*

Ábrázoljuk az  $f: x \mapsto x + 2$  és  $g: x \mapsto 4 - x$  elsőfokú függvényeket a valós számok halmazán!



A  $(-2)$ -nél kisebb számok esetén az  $f$  függvény negatív, a  $g$  pozitív értékeket vesz fel, tehát ezek a számok nem megoldásai az egyenlőtlenségnek.

A  $(-2)$ -nél nagyobb és  $4$ -nél kisebb számok esetén mindkét függvény pozitív értékeket vesz fel, ezért ezek a számok mind megoldásai az egyenlőtlenségnek.

A  $4$ -nél nagyobb számok esetén az  $f$  függvény pozitív, a  $g$  negatív értékeket vesz fel, tehát ezek a számok sem megoldásai az egyenlőtlenségnek.

A  $-2$  és  $4$  szintén nem megoldás, hiszen ezek bármelyikének behelyettesítésekor az eredeti egyenlőtlenségből a  $0 > 0$  hamis kijelentést kapjuk.

Összefoglalva:

az  $(x + 2)(4 - x) > 0$  egyenlőtlenségnek minden  $-2$  és  $4$  közötti szám gyöke, és más gyöke nincs. Ezért az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a  $]-2; 4[$  nyílt intervallum.

*Második megoldás (algebrai módszer)*

$(x + 2 > 0$  és  $4 - x > 0)$  **vagy**  $(x + 2 < 0$  és  $4 - x < 0)$ ,  
 $(x > -2$  és  $4 > x)$  **vagy**  $(x < -2$  és  $4 < x)$ .

Az első zárójeles egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza a  $]-2; 4[$  nyílt intervallum, a másodiké pedig az üres halmaz [nincs ugyanis olyan  $(-2)$ -nél kisebb szám, amely  $4$ -nél nagyobb lenne].

Tehát az  $(x + 2)(4 - x) > 0$  egyenlőtlenség megoldáshalmaza a  $]-2; 4[$  nyílt intervallum.



## FELADAT

- 2.** Egy alapítványi iskola bevétele az iskola tanulóinak létszámától is függ. Ha az iskolának 100-nál több tanulója van, akkor a helyi önkormányzattól 50 000 tallért és a 100-on felüli létszám után tanulónként még 800 tallér hozzájárulást kapnak. A támogatás feltétele az, hogy a teljes juttatás egy tanulóra jutó összege nagyobb legyen 550 tallérnál, de ne haladja meg a 600 tallért. Mekkora létszám esetén kaphatja meg az iskola az önkormányzati támogatást? Hány megoldása van a feladatnak?

- 3.** Oldd meg a valós számok halmazán az

a)  $\frac{x+2}{4-x} > 0$ ;  
b)  $\frac{x+2}{4-x} \leq 0$ ;

c)  $\frac{4-x}{x+2} \leq 0$

egyenlőtlenséget!



Megoldásaidat a függvényábrázoló programok segítségével is ellenőrizheted.

- 4.** Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a)  $(2x-5) \cdot (3-4x) \leq 0$

b)  $\frac{3-7x}{12+5x} > 0$

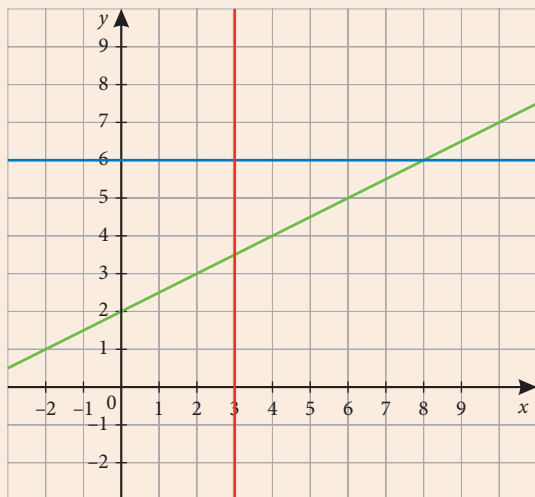
- 5.** Oldd meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) > 0$

## HÁZI FELADAT

- 1.** Hány olyan  $P(x; y)$  pont van a koordináta-rendszer síkjában, amelynek mindkét koordinátája egész szám, továbbá:

$x-3 \geq 0$  és  $y-6 \leq 0$  és  $y \geq \frac{1}{2}x+2$ ?



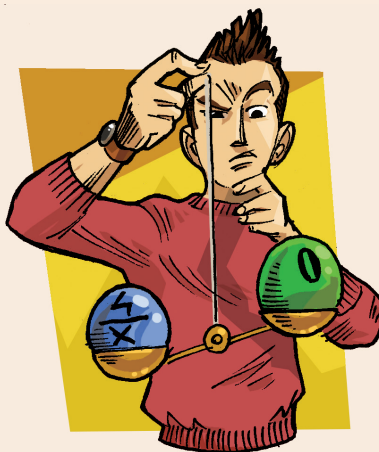
- 2.** Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a)  $\frac{x+3}{x+5} < 0$     b)  $\frac{-x-2}{-x} \geq 0$     c)  $\frac{6-2x}{2x+3} \leq 0$



Megoldásaidat a függvényábrázoló programok segítségével is ellenőrizheted.

- 3.** Tibornak a  $\frac{4}{x} < 0$  egyenlőtlenséget kellett megoldania. Úgy gondolta, alkalmazza a mérlegelvet. Mindkét oldalt megszorozta  $x$ -szel:  $4 < 0$ . Ez hamis kijelentés, tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása – gondolta Tibor. Jól gondolkodott-e Tibor? Válaszod indokold!



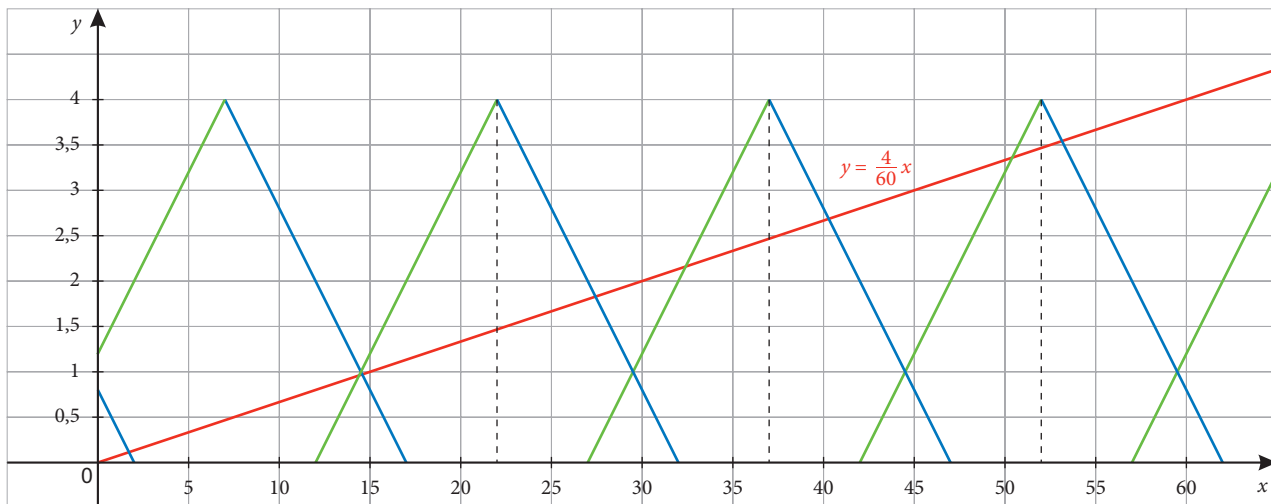
- 4.** Egy játékban három dobókockával dobunk. A dobott pontok összegét jelöljük  $p$ -vel. A játékban nyerünk, ha a  $2(9-p)\left(5-\frac{1}{3}p\right)$  szorzat értéke negatív, egyébként veszítünk. Hányféle pontösszeg esetén nyerhetünk?



- 1.** A villamosmegálló tájékoztatója szerint a következő villamos 12 perc múlva érkezik. A 10 perces villamosút helyett Karcsiék inkább gyalog indultak el, és egy óra alatt tették meg a 4 km-es távot.
- a) Hány villamos haladt el mellettük és előzte meg őket, ha a villamosok a menetrend szerint 15 perces időközönként követik egymást?
- b) Hány szemből jövő villamossal találkozhattak, ha a másik végállomásra mindig akkor indul egy-egy villamos, amikor beérkezik egy ellenkező irányú?

Megoldás

A villamosok számára vonatkozó egyenletet nehéz felírni, viszont **grafikonok** segítségével **meglepően egyszerű** a megoldás.



A vízszintes tengelyen a percekben mért időt, a függőlegesen a km-ben mért megtett utat látjuk. A piros vonal Karcsiék mozgásgrafikonja.

A metszéspontok azt jelzik, hogy 3 villamos hagyta el Karcsiékát, és 5 szemből jövő villamost számolhattak meg.

- 2.** Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$$\frac{3-x}{7x} < 2$$

Megoldás:

Az értelmezési tartomány:  $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

Könnyebben boldogulnánk a feladattal, ha az egyenlőtlenség jobb oldalán 0 állna. Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza nem változik (ekvivalens az átalakítás), ha mindkét oldalból kivonunk 2-t. Ezért rendezzük az egyenlőtlenséget a következő módon:

$$\frac{3-x}{7x} - 2 < 0$$

Hozzuk közös nevezőre, és vonjuk össze a bal oldalon álló kifejezéseket!

$$\frac{3-x}{7x} - \frac{14x}{7x} < 0$$

$$\frac{3-15x}{7x} < 0$$

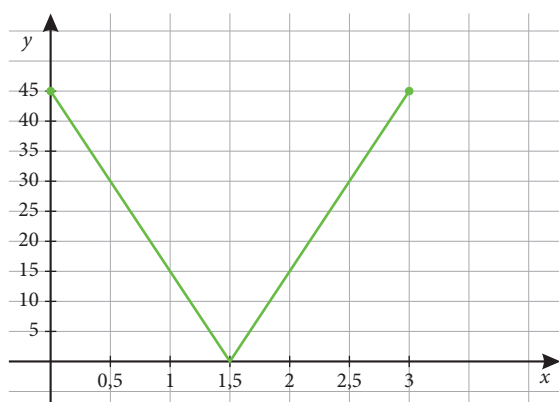
Fejezzük be innen a feladat megoldását!

## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Lajos kerékpárversenyző. Napi edzése részeként a 45-ös kilométertáblánál álló házától állandó  $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  sebességgel elkarikázik a megyeszékhelyig, ahol a kilométertáblák számozása kezdődik. Innen rögtön visszafordulva ugyanakkora sebességgel hazahajt.

A mellékelt grafikon megmutatja, hogy Lajos az edzése melyik pillanatában mekkora távolságra volt a megyeszékhelytől. Az időpontokat az  $x$  tengelyről, a távolságokat az  $y$  tengelyről olvashatjuk le.

A grafikon egyenlete:  $y = |30x - 45|$ .

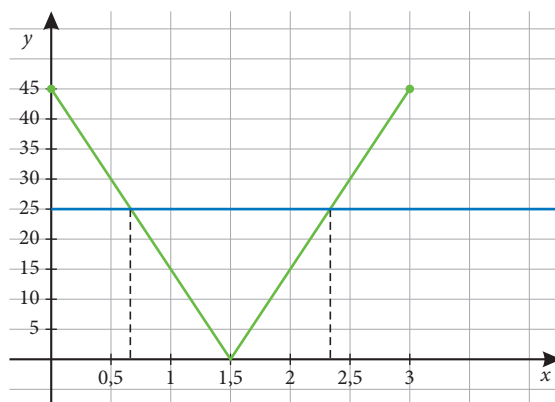


- a) Az indulástól számítva mikor hajt el Lajos a 25-ös kilométertábla mellett?
- b) Lajossal egy időben a barátja, Tibor is elindul egy kempingbiciklivel. Ő az 5-ös kilométertáblától indulva a megyeszékhellyel ellentétes irányban,  $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  sebességgel halad. Mikor és hol találkozik Tibor Lajossal?

Megoldás

- a) A második grafikonról leolvasható, hogy Lajos odafelé  $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$  órakor (vagyis a 40. percben), visszafelé pedig  $1,5 + \frac{25}{30} = \frac{7}{3}$  órakor (vagyis az indulás után 2 óra 20 perccel) halad el a 25-ös tábla mellett.

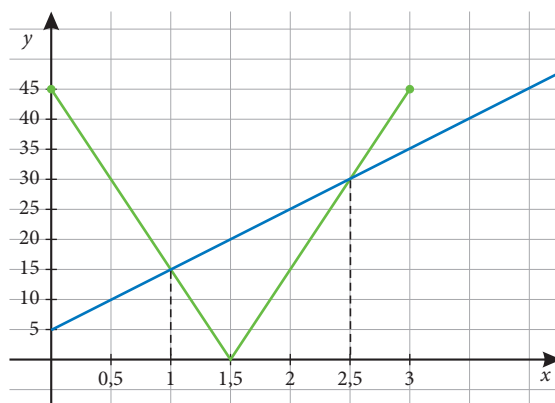
Megjegyzés: Grafikus úton megoldottuk az  $|30x - 45| = 25$  egyenletet.



- b) Az alsó koordináta-rendszerben ábrázoltuk azt a függvényt is, amely a kempingkerékpár helyzetét írja le. Ennek a hozzárendelési szabálya:  $x \mapsto 10x + 5$ .

A két grafikon két helyen metszi egymást, tehát kétszer fognak találkozni. Először indulásuk után 1 órával (ekkor Lajos a városközpont felé halad), a 15-ös táblánál, aztán pedig indulásuk után 2,5 órával, a 30-as táblánál (ekkor Lajos már hazafelé kerékpározik).

Megjegyzés: Grafikus úton megoldottuk az  $|30x - 45| = 10x + 5$  egyenletet.



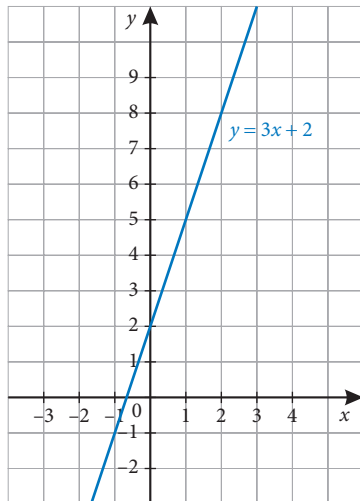
**2.** Melyik számot jelölheti az  $x$ , ha  $|3x + 2| = 8$ ?

*Megoldás*

*Első (grafikus) módszer*

Rajzoljuk meg az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonját a valós számok halmazán, és olvassuk le, melyik számhoz rendel ez a függvény a 8 értéket!

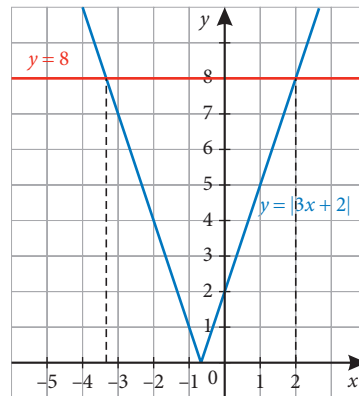
Először az  $x \mapsto 3x + 2$  elsőfokú függvényt ábrázoljuk:



Ezután a grafikonnak az  $x$  tengely alatti részét az  $x$  tengelyre tükrözzük. Így kapjuk az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonját (V betűhöz hasonló kék töröttvonal). Ugyanitt megrajzoltuk az  $x \mapsto 8$  függvény grafikonját, a piros egyenest. A két grafikon metszéspontjainak első koordinátái adják meg az  $|3x + 2| = 8$  egyenlet gyökeit.

Az ábráról természetesen csak közelítőleg olvashatjuk le a 2 és a  $-3\frac{1}{3}$  számot.

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, pontosan megkaptuk-e az egyenlet gyökeit.



Ha  $x = 2$ , akkor  $|3x + 2| = |6 + 2| = 8$ , tehát a 2 gyöke az adott egyenletnek.

Ha  $x = -3\frac{1}{3}$ , akkor  $|3x + 2| = |-10 + 2| = 8$ , tehát a  $-3\frac{1}{3}$  is gyöke az adott egyenletnek.

A grafikon jól mutatja, hogy az  $x$  más számot nem jelölhet.

*Ráadás*

*Második (algebrai) módszer*

Két olyan szám van, amelynek az abszolút értéke 8: a 8 és a  $-8$ . Ezért

$$3x + 2 = 8 \text{ vagy } 3x + 2 = -8.$$

Az első egyenletből  $3x = 6$ , vagyis  $x = 2$ , a második egyenletből  $3x = -10$ , vagyis  $x = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$ .

Tehát az  $x$  két különböző számot jelenthet: a 2-t vagy a  $(-3\frac{1}{3})$ -ot.



Egyenlet megoldásához használhatók a függvényábrázoló programok is.

## FELADAT

**1.** Oldd meg a következő abszolút értékű egyenleteket ( $x \in \mathbb{R}$ )!

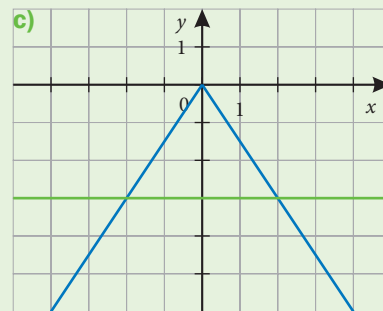
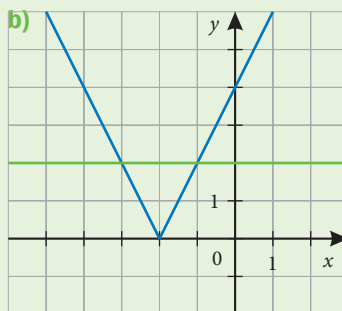
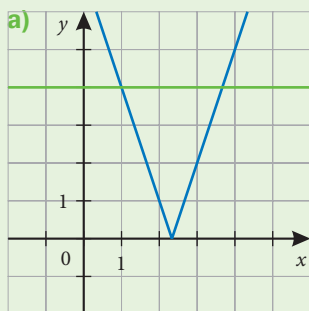
a)  $|x + 2| = 3$

b)  $|x + 2| = 2,3$

c)  $|x + 2| = 0$

d)  $|x + 2| = -1,8$

**2.** Írj fel egy-egy olyan egyenletet, amelynek a megoldása leolvasható a megadott grafikonról! Behelyettesítéssel ellenőrizd, hogy a leolvasott számok valóban megoldások!



## KIDOLGOZOTT FELADAT

3. Oldjuk meg grafikus úton az  $|3x + 2| = 0,5x - 1$  és az  $|3x + 2| = 0,5x + 5$  egyenletet ( $x \in \mathbb{R}$ )!

*Megoldás*

Az előző feladat megoldása során már megrajzoltuk az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonját. Most berajzoljuk ugyanabba a koordináta-rendszerbe az  $x \mapsto 0,5x - 1$  és az  $x \mapsto 0,5x + 5$  elsőfokú függvény grafikonját is.

Az első egyenesnek nincs közös pontja az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonjával. Ez azt jelenti, hogy az  $|3x + 2| = 0,5x - 1$  egyenletnek nincs gyöke.

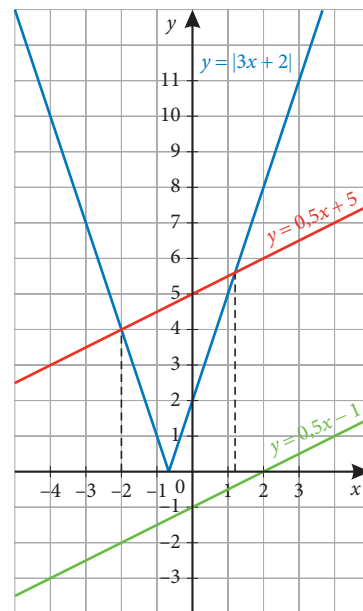
A második egyenesnek 2 közös pontja van az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonjával. Ez azt jelenti, hogy az  $|3x + 2| = 0,5x + 5$  egyenletnek 2 gyöke van, e közös pontoknak az első koordinátája:  $-2$  és  $1,2$ .

Az ábráról csak közelítőleg olvashatjuk le a metszéspontok első koordinátáit. Hogy pontosan ezek a gyökök, azt behelyettesítéssel ellenőrizhetjük:

Ha  $x = -2$ , akkor  $|3x + 2| = |-6 + 2| = 4$  és  $0,5x + 5 = -1 + 5 = 4$ , vagyis a  $-2$  gyöke az egyenletnek.

Ha  $x = 1,2$ , akkor  $|3x + 2| = |3,6 + 2| = 5,6$  és  $0,5x + 5 = 0,6 + 5 = 5,6$ , vagyis az  $1,2$  is gyöke az egyenletnek.

A grafikonról leolvashatjuk, hogy egyenletünknek több gyöke nem lehet.



## FELADAT

3. Oldd meg a következő abszolút értékes egyenleteket ( $x \in \mathbb{R}$ )!

a)  $|2x - 6| = 3$

b)  $|2x - 6| = x$

c)  $|2x - 6| = -\frac{2}{5}x + 6$

d)  $|2x - 6| = x - 3$

4. Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket ( $x \in \mathbb{R}$ )! Behelyettesítéssel ellenőrizd a megoldásokat!

a)  $|2,5x - 4| = -\frac{3}{2}x + 4$

b)  $9 - \frac{2}{5}x = |1,8x - 2|$

5. Oldd meg grafikusán az alábbi egyenleteket ( $x \in \mathbb{R}$ )!

a)  $|x| = x$

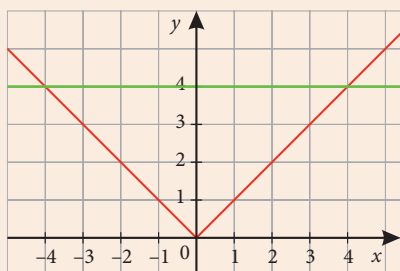
b)  $|x| = -x$

c)  $|x| = |x|$

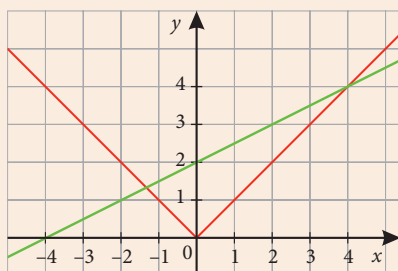
## HÁZI FELADAT

1. Írj fel egy-egy olyan egyenletet, amelynek a megoldása leolvasható a megadott grafikonokról! Behelyettesítéssel ellenőrizd, hogy a leolvasott számok valóban megoldások-e!

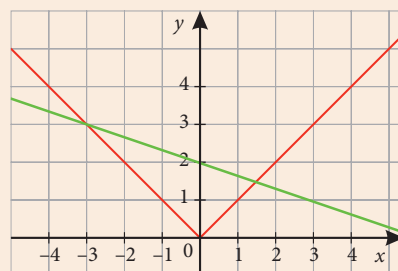
a)



b)



c)



**2** Oldd meg a következő egyenleteket ( $x \in \mathbf{R}$ )!

- a)  $|x - 2,7| = 3,5$       c)  $|70,4 + 22x| = 30,8$   
 b)  $|5,7 - 3x| = 5,7$       d)  $|4 - x| + 9 = 0$



Megoldásaidat függvényábrázoló programmal is ellenőrizheted.

**3** Oldd meg grafikusán az alábbi egyenleteket ( $x \in \mathbf{R}$ )!

- a)  $|2x| = x + 2$       c)  $|2x - 2| = 3 - x$   
 b)  $|2x| = 3 - x$       d)  $\left| \frac{2}{3}x - 2 \right| = -\frac{1}{3}x + 2$

## RÁADÁS

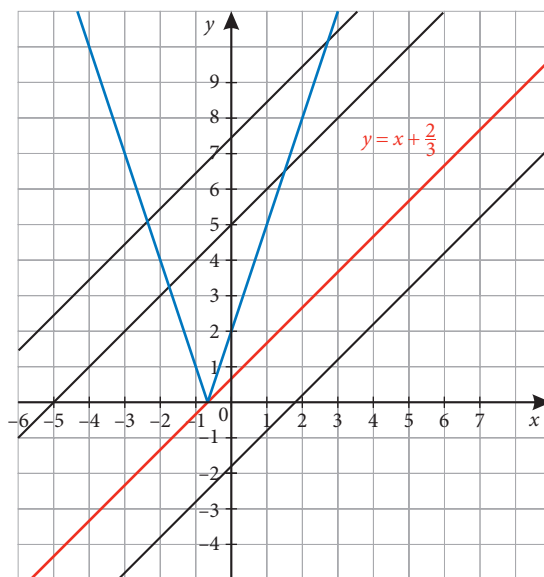
Vizsgáljuk meg, hogy az  $a$  értékének más-más megválasztása esetén hány gyöke van a  $|3x + 2| = x + a$  egyenletnek a valós számok halmazán!

Adjunk az  $a$ -nak több értéket! Ábrázoljuk az  $x \mapsto x + a$  elsőfokú függvényeket az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvénnyel közös koordináta-rendszerben! Látjuk, hogy

ha  $a = \frac{2}{3}$ , akkor az egyenesnek 1 közös pontja van az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonjával, vagyis az  $|3x + 2| = x + \frac{2}{3}$  egyenletnek egy gyöke van, a  $-\frac{2}{3}$ ;

ha  $a > \frac{2}{3}$ , vagyis ha a piros egyenest „feljebb” toljuk, akkor az új egyenesnek 2 közös pontja van az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonjával, vagyis az  $|3x + 2| = x + a$  egyenletnek két gyöke van;

ha  $a < \frac{2}{3}$ , vagyis ha a piros egyenest „lejjebb” toljuk, akkor az új egyenesnek nincs közös pontja az  $x \mapsto |3x + 2|$  függvény grafikonjával, vagyis az  $|3x + 2| = x + a$  egyenletnek nincs gyöke.



## FELADAT

**1.** A  $p$  paraméter egy valós szám. Mennyi  $p$  értéke, ha a  $\frac{2}{3}x + p = |1,5x - 4,5|$  egyenletnek a valós számok halmazán

- a) nincs megoldása;  
 b) pontosan egy megoldása van;  
 c) két megoldása van?

**2.** Ábrázold a következő függvény grafikonját!

- a)  $f: [0; 4] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ f(x-1), & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$   
 b)  $g: [0; 4] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = 1$ , ha  $0 \leq x < 1$ ; és  $g(x+1) = g(x) + x$ ; ha  $0 \leq x \leq 3$

## FELADAT

1. Egy dobókockával 50-szer dobtunk, és a következő eredményeket kaptuk:

6, 3, 2, 5, 2, 2, 1, 5, 4, 1, 3, 2, 5, 6, 2, 2, 1, 5, 4, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 5, 2, 1, 6, 2, 5, 6, 2, 6, 1, 5, 4, 1, 4, 2, 5, 6, 1, 3, 3, 5, 4, 1.

- a) Készíts gyakorisági táblázatot!  
b) Ábrázold a gyakoriságokat oszlop- és kördiagramon!

2. Egy elsőfokú függvény grafikonja olyan egyenes, amely áthalad a  $(0; -3)$  ponton, és a meredeksége 2. Az alább felsoroltak közül melyik a függvény hozzárendelési szabálya?

- a)  $x \mapsto -3x + 2$       c)  $x \mapsto 2x - 3$   
b)  $x \mapsto 3x - 3$       d)  $x \mapsto 2x$

3. Add meg azt a valós számok halmazán értelmezett függvényt, amelynek grafikonja az az egyenes, amely áthalad a  $P(-1; -3)$  és  $Q(3; 3)$  pontokon!

4. Ábrázold a következő függvényeket! Add meg az értékkészletüket, a zérushelyeiket, a legnagyobb és a legkisebb függvényértéküket, ha ezek léteznek! Jellemezd őket monotonitás szempontjából!

a)  $x \in [0; 5], x \mapsto \frac{3}{2}x + 1$

b)  $x \in ]-3; 4[, x \mapsto |x + 1|$

c)  $x \in [-1; +\infty[, x \mapsto -2x$

Közülük melyik elsőfokú függvény, melyik ír le egyenes arányosságot?

5. Az  $f$  függvény értelmezési tartománya a  $[-4; 6[$  intervallum, hozzárendelési szabálya:  $x \mapsto |2x - 3|$ . Rajzold meg az  $f$  grafikonját, sorold fel néhány tulajdonságát (legnagyobb függvényérték, legkisebb függvényérték, értékkészlet, zérushely, növekedő, csökkenő, monoton)!

6. Oldd meg grafikus módszerrel az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a megadott számhalmazon!

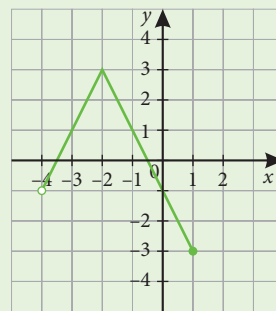
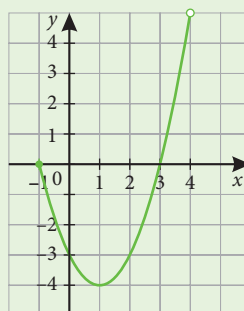
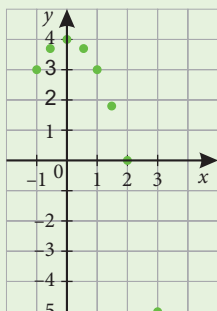
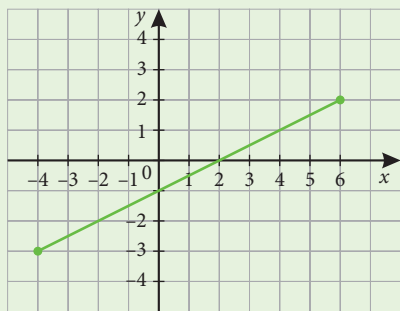
a)  $3x - 1 = -x + 3 \quad x \in \mathbb{R}$

b)  $(2x + 1)(5 - x) \geq 0 \quad x \in \mathbb{Z}$

c)  $|2x - 4| = 5 - x \quad x \in \mathbb{Q}$

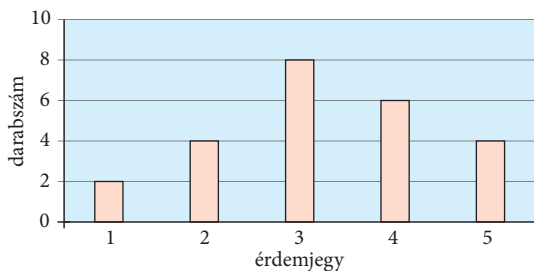
d)  $\frac{x+1}{5-x} < 0 \quad x \in ]-1; 4]$

7. Olvasd le a grafikonjukkal megadott függvények értelmezési tartományát, legnagyobb és legkisebb értékét (ha van!), értékkészletét, zérushelyeit!





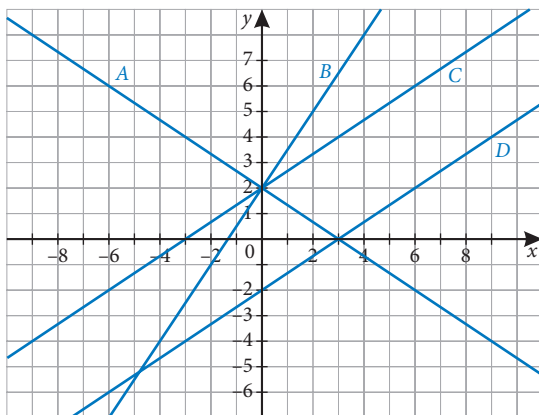
1. A grafikon egy osztály matematikadolgozatának eredményeit szemlélteti.



- a) Add meg az érdemjegyek relatív gyakoriságát!  
b) Ábrázold kördiagramon az adatokat!

2. a) A megadott egyenesek közül melyik egyenlete az  $y = \frac{2}{3}x + 2$ ?

- b) Melyik lehet egyenes arányosságot leíró függvény grafikonja?



- c) Add meg a többi grafikon egyenletét is!

3. Egy  $f$  lineáris függvényről tudjuk, hogy értelmezési tartománya a valós számok halmaza,  $f(-2) = 5$ , és  $f(2) = -1$ .

- a) Ábrázold a függvény grafikonját!  
b) Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!  
c) Ábrázold és jellemezd az  $|f|$  függvényt!

4. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket!

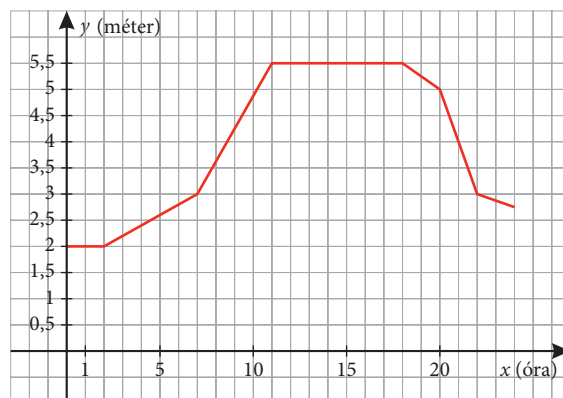
$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = |2x + 8| \quad \text{és}$$

$$g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = |-3x + 6|$$

Melyik függvényre igazak a következő állítások:  $f$ -re,  $g$ -re, mindkettőre vagy egyikre sem?

- A negatív számok halmazán szigorúan monoton csökkenő.
- A pozitív számok halmazán monoton növekvő.
- Az  $x = -4$  helyen minimuma van.
- Az  $x = 2$  helyen az értéke 12.
- Értékkészletének eleme 0.
- Ha  $x$  zérushelye, akkor  $|x|$  is zérushelye.

5. Egy kisebb folyó vízállását 24 órán keresztül folyamatosan mérték, majd grafikonon ábrázolták.



- a) Ezen a folyón a harmadfokú árvízvédelmi készültséget akkor rendelik el, ha a vízállás eléri a 3,5 métert. Mikor rendelték el, illetve mikor szüntették meg a harmadfokú készültséget?  
b) Óránként hány méterrel nőtt a vízszint, amikor a növekedés sebessége a legnagyobb volt?  
c) Óránként hány méterrel változott a vízszint, amikor a változás (növekedés vagy csökkenés) a leggyorsabb volt?

6. Oldd meg az egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a)  $x - 1 \geq 5 - 2x$

b)  $\frac{x+3}{x} > 0$

# TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Egy felmérés során 1000 véletlenszerűen kiválasztott embert kérdeztek meg arról, hogy milyen közlekedési eszközzel jár reggelente munkába. A válaszok számát a táblázat mutatja:

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| Gyalog                  | 125 |
| Kerékpár, motorkerékpár | 75  |
| Autó                    | 425 |
| Tömegközlekedés         | 375 |

- a) Számítsd ki az adatok relatív gyakoriságát!  
b) Ábrázold a gyakoriságokat kördiagramon!

2. Egy 35 pontos matematika dolgozatban a következő pontszámok születtek:

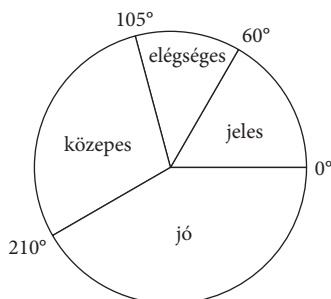
|            |     |      |       |       |       |       |       |
|------------|-----|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Pontszám   | 0–5 | 6–10 | 11–15 | 16–20 | 21–25 | 25–30 | 31–35 |
| Gyakoriság | 2   | 2    | 8     | 5     | 8     | 6     | 5     |

- a) Ábrázold oszlopdiagramon az adatokat!  
b) Készíts táblázatot a relatív gyakoriságokról!

3. (Érettségi feladat, 2006)

A 12. évfolyam tanulói magyarból próbaérettségit írtak. Minden tanuló egy kódszámot kapott, amely az 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből mindegyiket pontosan egyszer tartalmazta valamilyen sorrendben.

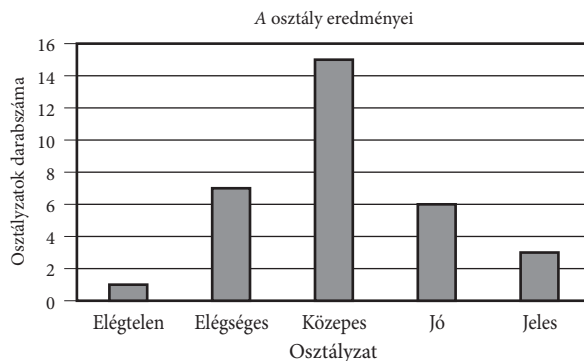
- a) Hány tanuló írta meg a dolgozatot, ha az összes képezhető kódszámot mind kiosztották?  
b) Az alábbi kördiagram a dolgozatok eredményét szemlélteti:



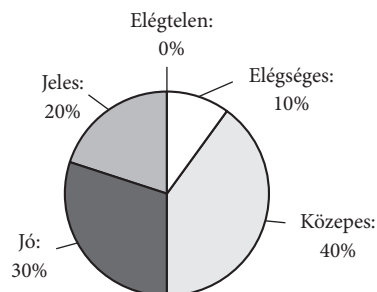
Add meg, hogy hány tanuló érte el a szereplő érdemjegyeket!  
Válaszod foglald táblázatba, majd a táblázat adatait szemléltesd oszlopdiagramon is!

4. (Kompetenciamérés, 2010)

A diákönkormányzat tanulmányi versenyt hirdetett az osztályok számára kémiaiából. A versenyen való részvételhez minden osztálynak le kellett adnia az év végi kémiaosztályzatokat. Az A osztály oszlopdiagramon, a B osztály kördiagramon adta le az eredményeket.



B osztály eredményei (30 tanuló)



A diagramok alapján dönts el, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!

- a) Mindkét osztályban közepes osztályzatot értek el a legtöbben.  
b) Az A osztályban kevesebben értek el jeles eredményt, mint a B osztályban.  
c) Mindkét osztályban ugyanannyi az osztálylétszám.  
d) A két osztályban összesen 17 tanuló kapott elégéses osztályzatot.
5. Adott két halmaz:  $A = \{1; 2; 3\}$  és  $B = \{x; y\}$ . Hány különböző függvény van, amelyek
- a) értelmezési tartománya A és képhalmaza B;  
b) értelmezési tartománya B és képhalmaza A;  
c) értelmezési tartománya A és értékkészlete B;  
d) értelmezési tartománya B és értékkészlete A?

**6** ☞ Ábrázold a következő függvények grafikonját!

a)  $f: \{-2; -0,5; 0,5; 1; 2\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = 2x$

b)  $g: \{-2; -0,5; 0,5; 1; 2\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = \frac{2}{x}$

**7** ☞ Ábrázold a következő függvények grafikonját!

a)  $\{-2; -0,5; 0,5; 1; 2\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

b)  $[-2; 2] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

c)  $] -1; 3] \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

d)  $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto x + 3$

**8** ☞ Add meg az elsőfokú függvényt, ha

a) grafikonjának meredeksége  $\frac{1}{3}$  és az  $y$  tengelyt  $-2$ -nél metszi;

b) grafikonjának meredeksége  $-4$  és az  $y$  tengelyt  $\frac{2}{5}$ -nél metszi!

**9** ☞ Add meg az elsőfokú függvényt, ha

a) grafikonjának meredeksége  $-3$  és egyik pontja  $P(4; 1)$ ;

b) grafikonjának meredeksége  $2,5$  és egyik pontja  $P(1,5; 3)$ !

**10** ☞ Add meg az elsőfokú függvényt, ha

a) grafikonjának két pontja  $P(102; 13)$  és  $Q(17; 21)$ ;

b) grafikonjának két pontja  $P(-41; -9)$  és  $Q(56; 92)$ !

**11** ☞ Mennyi Fahrenheit-fokban mérve

a) a glicerín fagyáspontja ( $18^\circ\text{C}$ );

b) az etanol forráspontja ( $78,4^\circ\text{C}$ )?

**12** ☞ Egy  $f$  elsőfokú függvényről tudjuk, hogy  $f(-4) = 10$  és  $f(2) = 8$ . Add meg a függvény hozzárendelési szabályát!

**13** ☞ Egy biciklis állandó,  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel halad. Indulása után 1 másodperccel egy másik kerékpáros is elindul ugyanazon az úton, ugyanarról a kezdőpontról, ugyanabban az irányban. A második biciklis sebessége  $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Ábrázold közös koordináta-rendszerben, hogy mekkora utat tesznek meg az idő függvényében (az első biciklis indulásától számítva)! Olvasd le a grafikonról, hogy mikor, és milyen távol éri utol a második kerékpáros az első!

**14** ☞ A grafikon egy „challenge day” napi kirándulás mozgásgrafikonja. Vizsgáld meg a grafikon, és válaszolj a következő kérdésekre!



a) Milyen messzire jutottak a kirándulók a kiindulási helyüktől?

b) Hazaérkezésig összesen hány kilométert gyalogoltak?

c) Mikor (mely időpontok között) haladtak a leggyorsabban?

d) Hány  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  volt a sebességük egyes esetekben?

e) Hányszor tartottak pihenőt?

f) Összesen mennyi ideig pihentek?

g) Hány órakor indultak hazafelé?

h) Hány órakor érkeztek haza?

**15** ☞ (Kompetenciamérés, 2011)

Zedfalva folyójának vízszintjét folyamatosan mérik. Egyik nyáron a sok csapadék miatt a folyó vízszintje emelkedni kezdett. Június 20-án 320 cm-es vízmagasságot mértek. A következő két hétben viszonylag egyenletesen, naponta átlagosan 37 cm-rel emelkedett a folyó vízszintje.

a) Ábrázold grafikonon a folyó vízszintjének alakulását!

b) Körülbelül milyen magas volt a vízszint július 4-én?

**16** ☞ Egy újszülött koala kb. 2 cm hosszú. Az ezt követő 4 év alatt – havonta átlagosan 1,5 cm-t növekedve – fejlődik ki teljesen.

a) Add meg azt a függvényt, amely a koala hosszát a születése óta eltelt hónapok számának függvényében írja le!

b) Milyen hosszú egy 1 éves koala?

c) Mennyi idősen lesz 50 cm hosszú?

**17** (Érettségi feladat, 2012)

Az  $f$  függvényt a 3-tól különböző valós számok halmazán értelmezzük az  $f(x) = \frac{1}{x-3}$  képlettel. Melyik valós  $x$  szám esetén veszi fel az  $f$  függvény az  $\frac{1}{20}$  értéket?

**18** (Érettségi feladat, 2013)

Adott a valós számok halmazán értelmezett  $f(x) = |x-4|$  függvény. Mely  $x$  értékek esetén lesz  $f(x) = 6$ ?

**19** (Érettségi feladat, 2014)

Válassza ki az  $f$  függvény hozzárendelési szabályát az  $A, B, C, D$  lehetőségek közül úgy, hogy az megfeleljen az alábbi értéktáblázatnak:

|        |    |   |    |
|--------|----|---|----|
| $x$    | -2 | 0 | 2  |
| $f(x)$ | -4 | 0 | -4 |

A:  $f(x) = 2x$

B:  $f(x) = x^2$

C:  $f(x) = -2x$

D:  $f(x) = -x^2$

**20** (Érettségi feladat, 2018)

Hol metszi a koordinátatengelyeket az  $x \mapsto -2x + 6$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) függvény grafikonja?

**21** (Érettségi feladat, 2018)

Egy elsőfokú függvény grafikonja az  $x$  tengelyt a  $(-2)$ -ben, az  $y$  tengelyt a 6-ban metszi. Mennyi a meredeksége?

**22** (Érettségi feladat, 2015)

Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$  lineáris függvény zérushelye  $-4$ . Tudjuk továbbá, hogy az  $x = 4$  helyen a függvényérték 6. Adja meg  $a$  és  $b$  valós számok értékét!

**23** (Érettségi feladat, 2018)

Adja meg a  $[-3; 1]$  zárt intervallumon értelmezett  $x \mapsto |x|$  függvény értékkészletét!

**24** (Érettségi feladat, 2017)

Legyen  $f: [-2; 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-4|$ , és  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 1$ .

**a)** Ábrázolja az  $f$  függvényt!

**b)** Határozza meg,  $x$  mely értéke esetén lesz az  $f$  és a  $g$  függvény értéke egyenlő!

**25** Egy időben két gyertyát gyújtunk meg. Az első gyertya 16 cm magas, és 4 óra alatt égne le teljesen. A második gyertya 12 cm magas, és 6 óra alatt égne le teljesen.

Ábrázold közös koordináta-rendszerben, hogy milyen magasak a gyertyák az idő függvényében (a meggyújtásuk pillanatától számítva)! Mikor lesznek egyforma magasak? Milyen magasak ekkor?

**26** Ábrázold a függvények grafikonját!

**a)**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 3$

**b)**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |2x - 3|$

**27** Ábrázold a következő függvények grafikonját, és jellegezd a függvényeket!

**a)**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |3x - 5|$

**b)**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |1 - 2,5x|$

**28** Ábrázold a következő függvények grafikonját, és jellegezd a függvényeket! Határozd meg szélsőértékeket, növekedési viszonyait, értékkészletüket, zérushelyüket!

**a)**  $\{-1; 5\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |6 - 2x|$

**b)**  $]-1; 5] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |6 - 2x|$

**29** Hol van zérushelye a következő függvényeknek?

**a)**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-3) \cdot (x-6)$

**b)**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x-1) \cdot (x+4)$

**c)**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (2x-5) \cdot (x+3)$

**30** Határozd meg az alábbi függvények zérushelyét számolással! ( $x \in \mathbb{R}$ )

**a)**  $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3$

**b)**  $f(x) = -2x + 3$

**c)**  $f(x) = x^2 + 2$

**d)**  $f(x) = x^2 - 9$

**e)**  $f(x) = (x+3)^2$

**f)**  $f(x) = (x-3)^2$

**31** Határozd meg az alábbi, valós számok halmazán értelmezett függvények zérushelyét számolással!

**a)**  $f(x) = |3x - 5|$

**b)**  $g(x) = |4 - 7x|$

**c)**  $h(x) = \left| \frac{1}{3}x - 2 \right|$

**d)** Hol pozitív az  $f, g, h$  függvények helyettesítési értéke?

**32** ☞ Oldd meg grafikusan az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a)  $2x + 1 = 3x - 6$

c)  $-x + 5 < 2x - 1$

e)  $|3x - 1| = 2x - 4$

b)  $\frac{1}{4}x + 2 = -\frac{1}{2}x + 5$

d)  $\frac{2}{3}x - 5 \geq -\frac{1}{2}x + 2$

f)  $\left|\frac{1}{2}x + 1\right| = |x - 4|$

**33** ☞ (Érettségi feladat, 2010) Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$$x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$$

**34** ☞ (Érettségi feladat, 2015) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$|x - 3| = 3x - 1$$

**35** ☞ (Érettségi feladat, 2013) Oldja meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget!

$$\frac{x+2}{3-x} \geq 0$$

**36** ☞ (Érettségi feladat, 2009) Melyek azok az egész számok, amelyek mindkét egyenlőtlenséget kielégítik?

$$3 - \frac{x}{2} > x \quad \text{és} \quad 3x + 4 \geq -3x - 8$$

**37** ☞ Oldd meg grafikus módszerrel az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

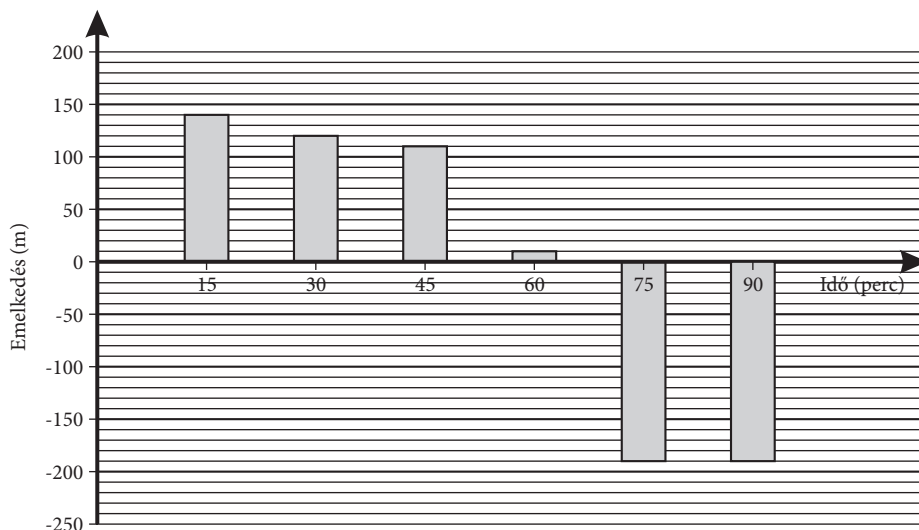
a)  $(5 + 3x)(x - 2) > 0$ ; b)  $(6x + 4)(5 - 2x) < 0$ ; c)  $(10 - 2x)(21 - 3x) \geq 0$ ; d)  $(7x + 1)(3x - 6)(x - 4) \leq 0$

**38** ☞ Oldd meg grafikus módszerrel az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a)  $\frac{2x-6}{x+3} > 0$ ; b)  $\frac{5x+33}{7-x} < 0$ ; c)  $\frac{4x-10}{x+9} \geq 0$ ; d)  $\frac{4-2x}{8+x} \leq 0$ .

**39** ☞ (Kompetenciamérés, 2016)

Péter hőlégballonozik. Az alábbi diagram a repülési magasságának a VÁLTOZÁSÁT ábrázolja 15 percenként, azaz azt mutatják az oszlopok, hány métert emelkedett vagy süllyedt az előző adathoz képest.



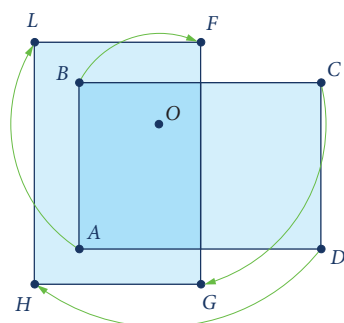
a) Döntsd el, melyik igaz, illetve melyik hamis az alábbi állítások közül!

- A A hőlégballon kb. 100 métert süllyedt a 45. és a 60. perc között.
- B A hőlégballon a 75. és a 90. percben ugyanolyan magasan volt.
- C Az emelkedés kevesebb, mint 75 percig tartott.
- D A 75. percben magasabban volt a hőlégballon, mint a 15. percben.

b) Készíts olyan grafikont, amely azt ábrázolja, hogy milyen magasan volt a hőlégballon az idő függvényében! Közeleítsd a hőlégballon mozgását azzal, hogy 15 percen keresztül minden alkalommal állandó sebességgel emelkedik, illetve süllyed.

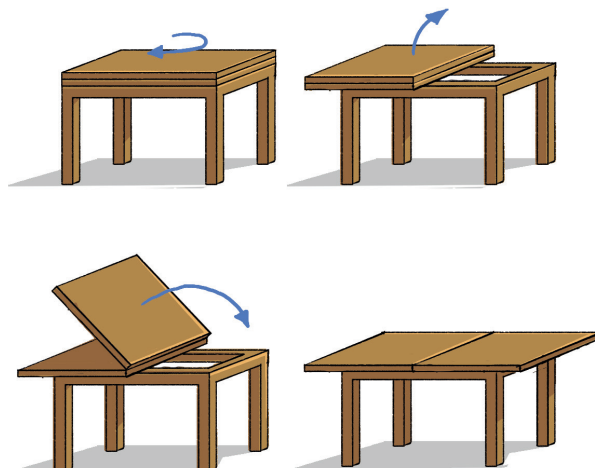
## BEVEZETŐ

Az asztalosok többféle megoldással tudnak kinyitható asztalt készíteni. Az egyik ötletes megoldás, amikor az asztallap egy tengely körül elforgatható. Ha  $90^\circ$ -kal elfogatjuk, akkor kinyithatjuk úgy, hogy a lábak a tartó kerettel ugyanúgy középen vannak, mint félbehajtott állapotban. Ehhez ügyesen kell elhelyezni a tengelyt. A jól elhelyezett  $O$  pont körül  $90^\circ$ -kal elforgatva az



$ABCD$  téglalap az  $EFGH$  téglalapba fordul át.

Az ábrán felülnézetből látjátok az egymásba forduló téglalapokat és az elforgatás  $O$  középpontját. Később megnézzük, hogy lehet az  $O$  pontot megszerkeszteni a téglalap csúcsainak ismeretében.

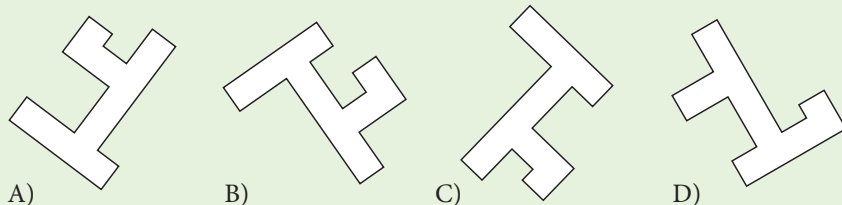


## FELADAT

1. (Kompetenciamérés, 2009)

A jobb oldali ábrán egy síkidom látható.

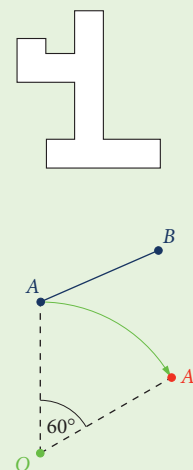
Ezt a síkidomot a síkban elforgatjuk. Melyik kép mutathatja a forgatás eredményét?



2. Az  $AB$  szakaszt elforgattuk az  $O$  pont körül  $60^\circ$ -kal az óramutató járásával megegyező irányban.

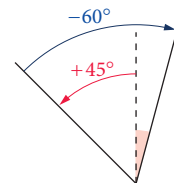
Az ábra mutatja az  $A$  pont képét a forgatás után ( $A'$ ). Hol lesz a  $B$  pont képe?

Vedd fel az ábrát a füzetedbe, és szerkeszd meg a  $B$  pont képét!



## ELMÉLET

A 2. feladatban látható módon az  $O$  pont körüli  $60^\circ$ -os forgatás után az  $A$  pontra és annak  $A'$  képére igaz, hogy az  $A$  és  $A'$  pontoknak az  $O$ -tól való távolsága megegyezik, és az  $AOA'$  szög  $60^\circ$ . A  $60^\circ$  itt egy **irányított szög**, amelyben az óramutató járásával ellentétes forgatási irány tartozik a pozitív szögekhez, és az óramutató járásával megegyező forgatási irány tartozik a negatív szögekhez.





Ezzel az eljárással az  $A$  ponthoz hozzárendeljük az  $A'$  pontot, és hasonló módon a sík többi pontjához is megszerkeszthetők (és egyben hozzárendelhetők) a megfelelő képpont. Azt a (kölsönösen egyértelmű) függvényt, melynek értelmezési tartománya és értékkészlete is ugyanaz a ponthalmaz, **geometriai transzformációnak** nevezzük. A pont körüli forgatás egy geometriai transzformáció.

### Pont körüli forgatás

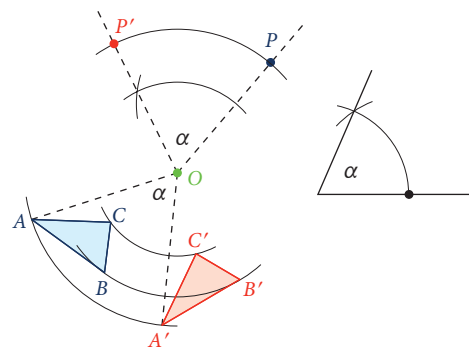
**Definíció:** Adott a síkon egy  $O$  pont (az elforgatás középpontja), és adott egy  $\alpha$  irányított szög. A sík minden  $P$  pontjához rendeljük hozzá a  $P'$  pontot úgy, hogy

- $O$  képe önmaga (azaz  $O' = O$ ),
- ha  $P \neq O$ , akkor  $P'$  a síknak az a pontja, melyre  $OP = OP'$ , és a  $POP'$  szög  $\alpha$ .

A forgatás irányát *pozitívnak* mondjuk, ha az ellentétes az óramutató járásával, *negatívnak* mondjuk, ha az megegyezik az óramutató járásával. Ha a forgatás szöge mellé nem írunk előjelet, akkor azt pozitívnak gondoljuk.

A szerkesztés lépései:

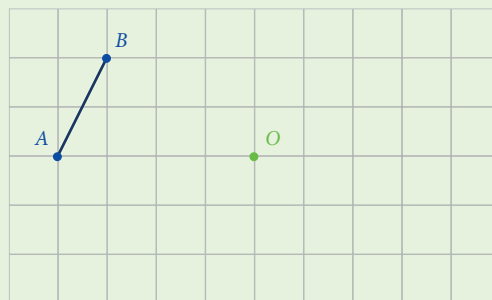
- az  $OP$  félegyenesre felmérjük az  $\alpha$  irányszöget;
- az  $O$  pontból  $OP$  sugárral körívet rajzolunk.  $P'$  a körív és az új szögszár metszéspontja.



### FELADAT

3 A füzetedben dolgozz!

- Forgasd el az  $AB$  szakaszt az  $O$  pont körül  $180^\circ$ -kal! Miért nem adtuk meg az elforgatás irányát?
- Tükrözd az  $AB$  szakaszt az  $O$  pontra!
- Mit tapasztalsz? Milyen kapcsolat fedezhető fel az  $O$  pont körüli  $180^\circ$ -os elforgatás és az  $O$  pontra való tükrözés között?



### ELMÉLET

#### Középpontos tükrözés

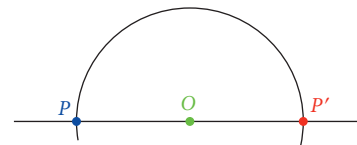
**Definíció:** Adott a síkon egy  $O$  pont, a tükrözés középpontja. A sík minden  $P$  pontjához rendeljük hozzá a  $P'$  pontot úgy, hogy:

- $O$  képe önmaga (azaz  $O' = O$ ),
- ha  $P \neq O$ , akkor a  $P'$  a  $PO$  egyenesének azon  $P$ -től különböző pontja, melyre  $P'O = PO$ .

A síkon a középpontos tükrözés a pont körüli forgatás egy különleges esete:  $180^\circ$ -os forgatás  $O$  pont körül.

A szerkesztés lépései:

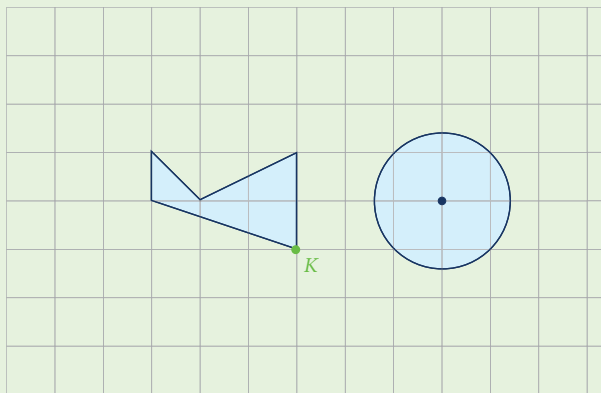
- meghúzzuk az  $OP$  egyenest;
- az  $O$  pontból  $OP$  sugárral körívet rajzolunk.  $P'$  a körív és az egyenes ( $P$ -től különböző) metszéspontja.



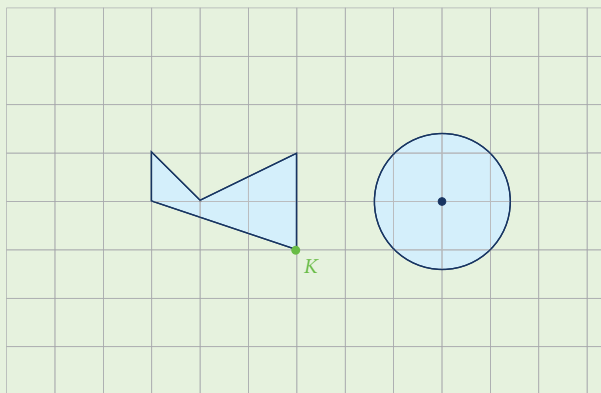
## FELADAT

4. Hajtsd végre a négyzetrács felhasználásával a transzformációkat az ötszögön és a körön a füzetedben!

a) Tükrözés a  $K$  pontra.



b) Forgatás a  $K$  pont körül  $+90^\circ$ -kal.

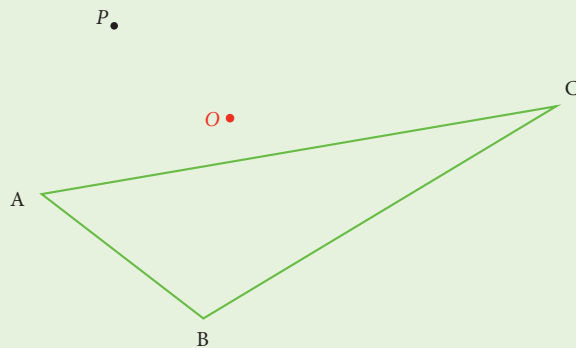


5. Szerkessz olyan derékszögű háromszöget, amelynek befogói 6 cm és 3 cm hosszúak! Forgasd el a háromszöget

- a) a derékszögű csúcsa körül;  
b) az átfogójának felezőpontja körül  $+90^\circ$ -kal!

6. Tükrözz egy háromszöget mindhárom oldalának a felezőpontjára! Mit alkot együtt a háromszög és a három képe?

7. Forgasd az  $ABC$  háromszöglemezt az  $O$  pont körül! (A füzetedben dolgozz!) Ha elég nagy a forgatás szöge, akkor forgatás közben a háromszöglemeznek több pontja is áthaladhat a megadott  $P$  ponton.

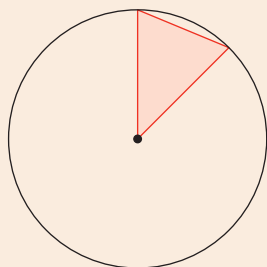


- a) Szerkeszd meg a háromszög egy olyan elforgatottját, amelynek a határvonalára illeszkedik a  $P$  pont! Hány megoldása van a feladatnak?  
b) Szerkeszd meg az  $ABC$  háromszöglemezen az összes olyan pontot, amelynek az  $O$  pont körüli elforgatottja lehet a  $P$  pont is!

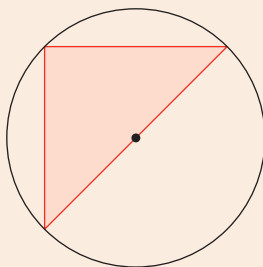
## HÁZI FELADAT

1. Forgasd el a háromszöget a kör középpontja körül, negatív irányban,  $45^\circ$ -kal! A füzetedben dolgozz!

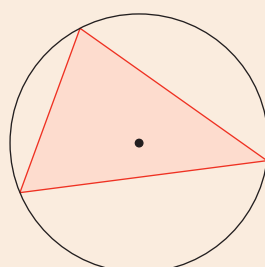
a)



b)

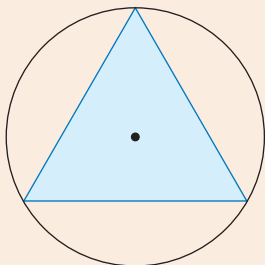


c)

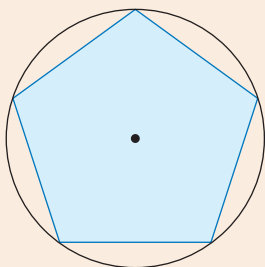


- 2.** Tükrözd a szabályos sokszöget a körülírt körének középpontjára! A füzetedben dolgozz!

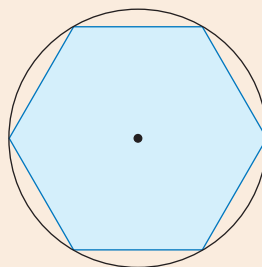
a)



b)



c)



- 3.** Szerkessz olyan háromszöget, amelynek oldalhosszúságai 36 mm, 48 mm és 60 mm, majd tükrözd

a) a legkisebb oldal felezőpontjára;

b) a legnagyobb oldal felezőpontjára!

A háromszög és a tükörképe együtt egy négyszöget alkot. Sorold fel ennek a négyszögnek a tulajdonságait!

- 4.** Vegyél fel két különböző pontot: *A*-t és *B*-t! Szerkeszd meg azt az *O* pontot, amelyre *A*-t tükrözve *B*-t kapjuk!



A GeoGebra programmal ellenőrizheted a szerkesztéseid helyességét is.

## RÁADÁS

- 1.** (Kompetenciamérés, 2017)

A rendőrök gyakran használják az irány meghatározására az óraállások megnevezését, ahol mindig arra van 12 óra, amerre a rendőr néz. Például ha a rendőr (*R*) és a bűnöző (*B*) az ábrán látható módon helyezkedik el egymáshoz képest, akkor a bűnöző 5 óránál található.

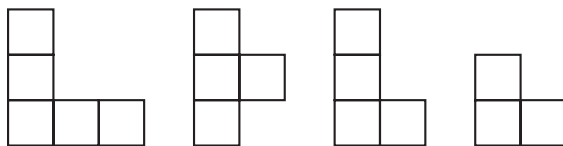
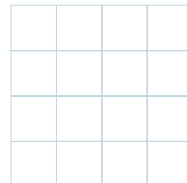
- a) Hány óránál van a bűnöző a következő ábrán a rendőrhöz képest?



- b) Merre néz az *A* helyen lévő rendőr, ha hozzá képest a bűnöző 8 óránál van?

- 2.** (Kompetenciamérés, 2015)

A képen négy alakzat látható. Helyezd el mind a négy alakzatot egy  $4 \times 4$ -es négyzethálón úgy, hogy ne fedjék egymást! Az alakzatokat csak elforgatni szabad, tengelyesen tükrözni nem.



- 3.** Vegyél fel egy konvex szöget, és a szögtartományban egy *P* pontot! Szerkeszd meg azt az egyenest, amelynek a szögtartományba eső részét a *P* pont felezi!

- 4.** Vegyél fel két párhuzamos egyenest, és közöttük egy *P* pontot. Szerkeszd meg azt a szabályos háromszöget, amelynek egyik csúcsa *P*, másik két csúcsa pedig az egyik, illetve a másik egyenesre illeszkedik!

## BEVEZETŐ

A repülőgépek kötelékben repülnek. Az eseményről másodpercenként felvételt készítenek a földről. Mindegyik repülőhöz odarajzoltuk azt az elmozdulásvektort, amely a következő felvételhez tartozik. Látható, hogy két pilóta kicsit hibázott. Melyik kettő, és milyen hibát követett el?

## Megoldás

A képen látható két alsó gép pilótája hibázott. A legelső gép nem tartotta az irányt, a felette repülő gép tartotta az irányt, de kicsit nagyobb volt a sebessége, mint a többinek.

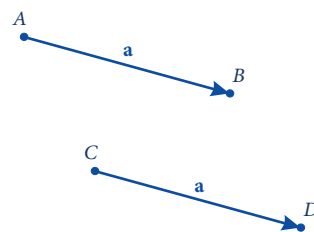


## ELMÉLET

Találkozhattatok már azzal a megfogalmazással, hogy „a vektor irányított szakasz”. Ez abban az értelemben megfelelő, hogy minden vektornak van hossza, ahogy minden szakasznak is van hossza. Az is igaz, hogy ha a szakasz egyik végpontját kezdőpontnak, a másik pontját végpontnak tekintjük, akkor az irányított szakasz egyértelműen meghatároz egy vektort.

Viszont arra is figyelni kell, hogy amíg az ábrán látható két szakaszt különbözőnek tekintjük ( $AB$  és  $CD$ ), addig ha az  $A$ -ból  $B$ -be, illetve a  $C$ -ből  $D$ -be mutató vektort nézzük, akkor ezek ugyanazt a vektort jelenítik meg. Másként fogalmazva: ha két irányított szakasznak megegyezik a hossza és az iránya, akkor ezek ugyanazt a **vektort** határozzák meg.

Hasonlít ez a helyzet a közönséges törtre: ott is igaz, hogy ugyanazt az értéket végtelen sokféle alakban felírhatjuk:  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{75}{100} = \dots$ . Ahogy ezek a törtek különböző alakban ugyanazt a számot határozzák meg, az egymással egyenértékű (azonos hosszúságú és irányú) irányított szakaszok ugyanazt a vektort határozzák meg.

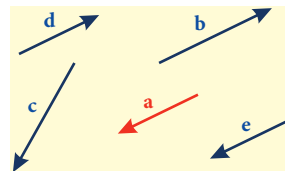


A vektort az *iránya* és az *hossza* (abszolút értéke) jellemzi.

Ábránkon

- Az  $a$  és az  $e$  egyirányú, a  $b$  és a  $d$  egyirányú, az  $a$  és az  $e$  a  $b$ -vel is és a  $d$ -vel ellentétes irányú.
- Az  $a$ , a  $d$  és az  $e$  abszolút értéke egyenlő; a  $b$  és a  $c$  abszolút értéke egyenlő.

Ezek miatt az  $a$  és az  $e$  **egyenlő vektorok**, az  $a$  és a  $d$  **ellentett vektorok**, a  $d$  és az  $e$  **ellentett vektorok**, a többi vektor között ilyen kapcsolat nincs.



Két vektort **egyenlőnek** mondunk, ha ugyanaz az irányuk is, abszolút értékük is.

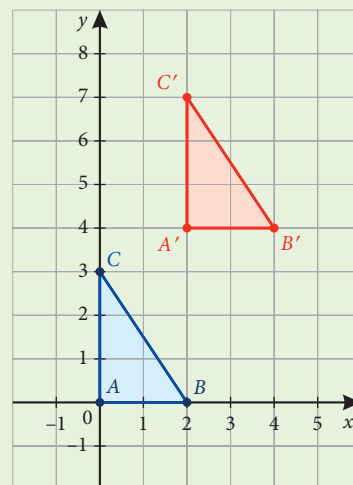
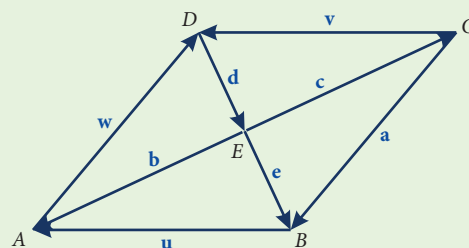
Két vektor egymás **ellentettje**, ha ugyanaz az abszolút értékük, az irányuk pedig ellentétes.

Egy  $v$ -vel jelölt vektor ellentettjének a jele:  $-v$ . A  $-v$  vektor ellentettje a  $v$ .

Tehát az ábra szerinti vektorok esetén például:  $d = -a$  és  $a = -d$ .

## FELADAT

1. Keresd az ábrán egyenlő és ellentett vektorokat szemléltető irányított szakaszokat.
2. Vegyél fel egy  $P$  pontot és egy  $v$  vektort! Keresd meg azt a  $Q$  pontot, amelyre
  - a)  $P$ -ből  $Q$ -ba mutató vektor  $v$ ;
  - b)  $P$ -ből  $Q$ -ba mutató vektor  $-v$ ;
  - c)  $Q$ -ból  $P$ -be mutató vektor  $v$ ;
  - d)  $P$ -ből  $Q$ -ba mutató vektor hossza megegyezik  $v$  hosszával, de nem párhuzamos  $v$ -vel!
3. A koordináta-rendszerben az ábra szerint felvettük az  $ABC$  derékszögű háromszöget. Eltoltuk a háromszöget, és ekkor az  $A'B'C'$  háromszöghöz jutottunk. Hasonlítsd össze az  $A$ -ból  $A'$ -be,  $B$ -ből  $B'$ -be, és  $C$ -ből  $C'$ -be mutató vektorokat!
  - a) Igaz-e, hogy egyenlő hosszúak? Igaz-e, hogy azonos az irányuk?
  - b) Hány vektor ez valójában?

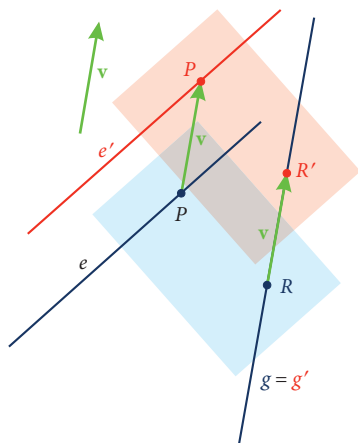


## ELMÉLET

### Eltolás

Az eltolás és a vektor két szorosan összekapcsolódó fogalom.

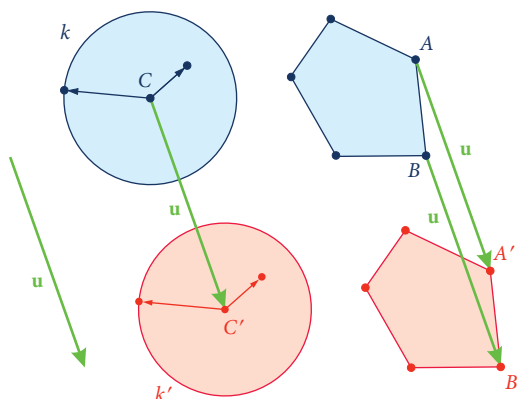
**Definíció:** Adott a síkon egy  $v$  vektor. A sík minden  $P$  pontjához rendeljük hozzá a  $P'$  pontot úgy, hogy a  $PP'$  vektor megegyezzen  $v$  vektoralal.



Ha egy egyenes párhuzamos az eltolás vektorával, akkor a képe önmaga, minden más esetben az egyenes és a képe párhuzamos egymással.

Egyenlő vektorok ugyanazt az eltolást hozzák létre.

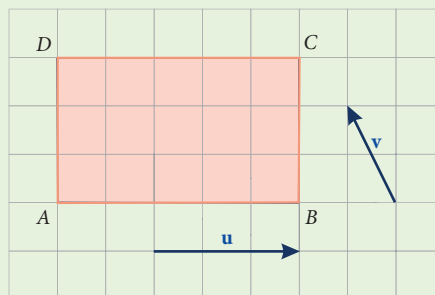
Ha egy pontthalmazt eltolunk egy vektorral, utána pedig a képét az ellentett vektorral toljuk el, visszajutunk az eredeti pontthalmazhoz.



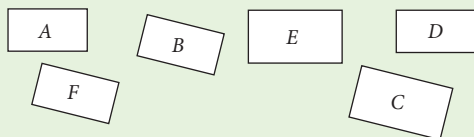
Az ábra azt mutatja, hogy mi történik egy körrel és egy sokszöggel, ha a síkjukban egy adott  $u$  vektorral eltoljuk őket.

## FELADAT

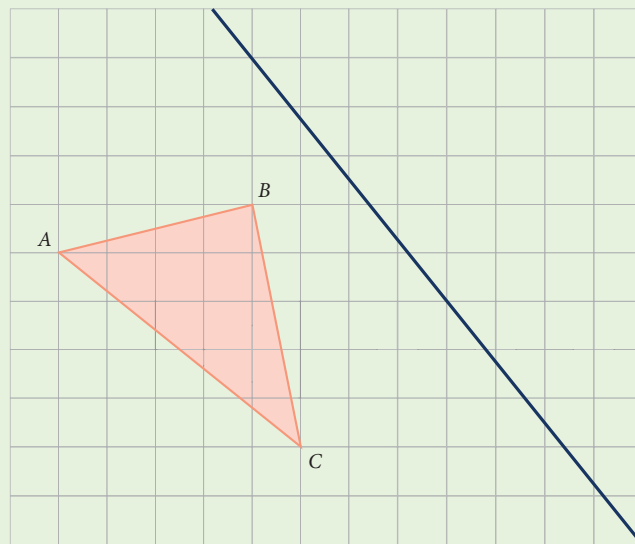
4. a) Told el a téglalapot az  $u$ , majd a kapott alakzatot a  $v$  vektorral!  
 b) Melyik vektorral kell eltolni a téglalapot, hogy  $A$  csúcsának a képe a téglalap egy másik csúcsa legyen?



5. (Kompetenciamérés, 2003)  
 Melyek azok az alakzatok, amelyek egymásból eltolással, (forgatás nélkül) megkaphatók?

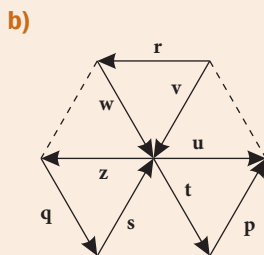
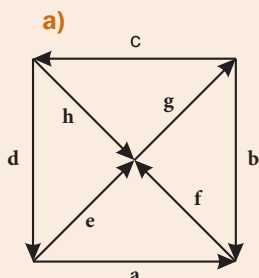


6. Told el a háromszöget úgy, hogy az eltolás után egyik csúcsa az egyenesre essen!  
 a) Hány megoldása van a feladatnak?  
 b) Melyik esetben lesz az eltolás vektorának hossza a legkisebb?  
 c) Told el a háromszöget úgy, hogy az egyik csúcsa az egyenesre essen, és pontosan egy közös pontja legyen az eredeti háromszöggel! Hány megoldása van a feladatnak?



## HÁZI FELADAT

1. Keresd meg az egyenlő vektorokat és az ellentett vektorokat!

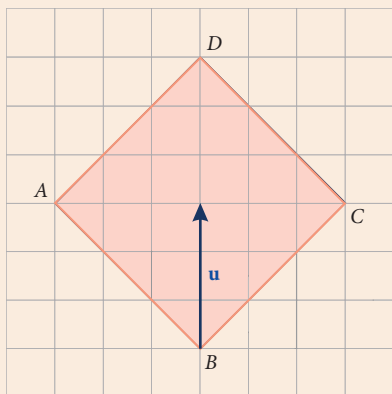


2. Tolj el a síkjában egy 4 cm átmérőjű körvonalat egy 4 cm hosszú vektorral! Melyik állítás igaz, és melyik hamis?

- a) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma függ az eltolás irányától is.  
 b) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma csak 0 lehet.  
 c) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma csak 1 lehet.  
 d) Az eredeti és az eltolt kör közös pontjainak száma lehet 2 is.



### 3. Told el a négyzetet az $\mathbf{u}$ vektorral!



Milyen alakzat lett az eredeti és az eltolat alakzat közös része? A közös rész területe hány százaléka az eredeti négyzet területének?

### 4. Vegyél fel egy kört és benne egy $AB$ húrt! Told el úgy a kört, hogy

a) az  $A$  pont képe  $B$  pont legyen!

b) a  $B$  pont képe az  $A$  pont legyen!

Mindkét esetben add meg az eltolás vektorát!

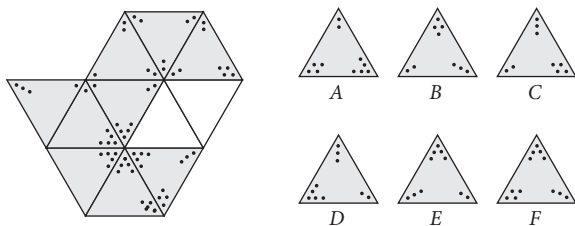
## RÁADÁS

### 1. (Kompetenciamérés, 2016)

A triominos olyan dominójáték, amely olyan háromszög alakú lapocskákból áll, amelyeknek a sarkaira különböző számú pont van felfestve 0 és 5 között.



A játék során a lapocskákat úgy helyezik egymás mellé, hogy az egymással érintkező csúcsokon lévő pontok száma azonos legyen. A következő ábrán egy megkezdett játék pillanatnyi állása látható. Melyik lapocskák helyezhetők el a szabálynak megfelelően az üres helyekre?

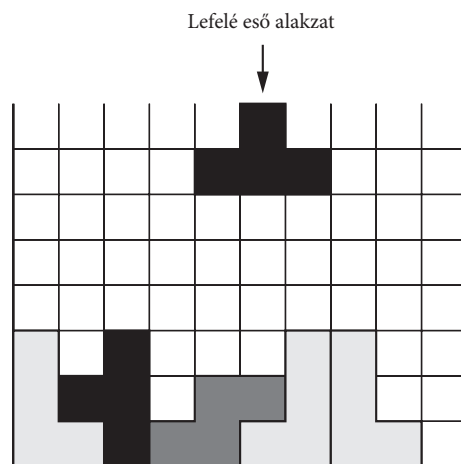


### 2. (Kompetenciamérés, 2017)

Balázs tetriszt játszik a számítógépén.

A lefelé eső alakzatokat forgatással, illetve jobbra és balra történő eltolással lehet mozgatni a pályán, amíg le nem érnek az aljára vagy el nem érnek egy másik alakzatot. Ha egy hézagmentes sor keletkezik, az eltűnik a pályáról, és a fölötté lévő sorok lejjebb kerülnek. Az alakzatok kis négyzetekből állnak, a fekete alakzat forgatásának középpontja a „középső” kis négy-

zet középpontja: annak a négyzetnek a középpontja, amelyiknek mindhárom másik kis négyzettel van közös oldala.



a) Hogyan mozgassa Balázs a lefelé eső alakzatot, hogy hézagmentessé váljon és eltűnjön a legalsó sor?

A Forgassa el jobbra  $90^\circ$ -kal, majd tolja el jobbra a falig.

B Tolja el jobbra a falig, majd forgassa el jobbra  $90^\circ$ -kal.

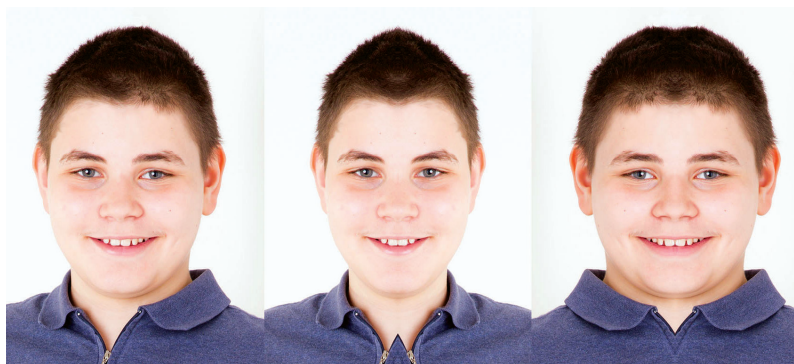
C Tolja el jobbra a falig, majd forgassa el balra  $90^\circ$ -kal.

D Forgassa el balra  $90^\circ$ -kal, majd tolja el jobbra a falig.

b) Hol áll meg a lefelé eső alakzat a többi esetben?

## BEVEZETŐ

Szép lehet egy tengelyesen szimmetrikus díszítő minta. Szép az emberi arc is, a maga szimmetriájával. Közismert tény azonban, hogy az ember arca sosem tökéletesen szimmetrikus. A digitális technika korában érdekes kísérlet azzal eljátszani, hogyan néznénk ki tökéletesen szimmetrikusan. Számítógépes képszerkesztő program segítségével egy fénykép megfelelezhető és tükrözhető. Ha van kedved, próbáld ki!

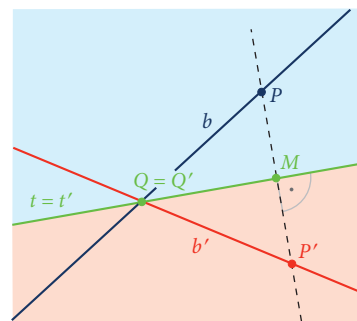
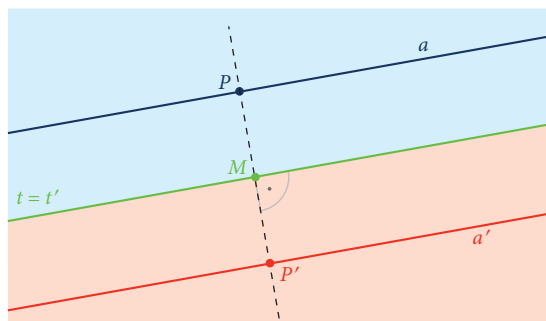
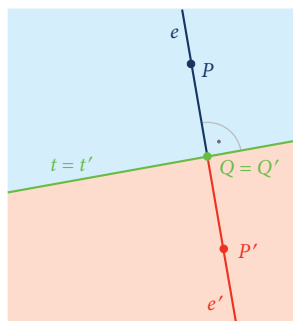


## ELMÉLET

## Egyenesre vonatkozó (tengelyes) tükrözés

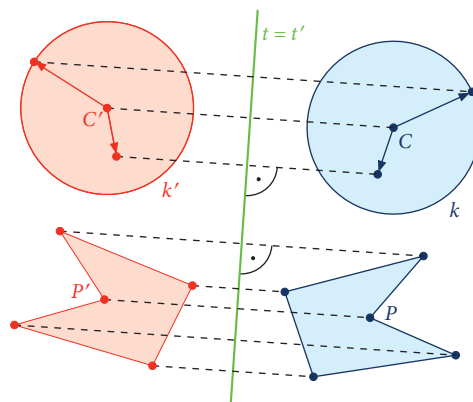
**Definíció:** Adott a síkon egy  $t$  egyenes (a tükrözés tengelye). A sík minden  $P$  pontjához rendeljük hozzá a  $P'$  pontot úgy, hogy:

- ha  $P$  a  $t$  egyenes egy pontja, akkor a képe önmaga,
- ha  $P$  nincs rajta a  $t$  egyenesen, akkor a képe az a  $P'$  pont a síkban, amelyre  $P'P$  szakasznak felezőmerőlegese a  $t$  egyenes.



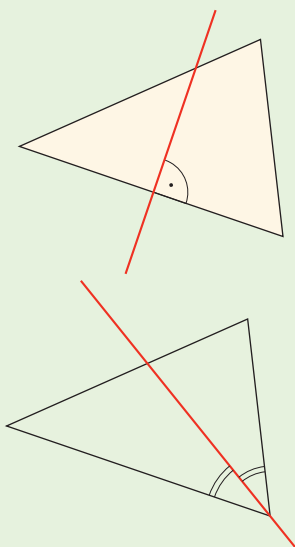
A tengely képe önmaga. Ha a sík egy egyenese merőleges a tengelyre, akkor egybeesik a képével, ha pedig párhuzamos a tengellyel, akkor a képe is párhuzamos vele. Ha egy egyenes metszi a tengelyt, de nem merőleges rá, akkor a képét a tengelyen metszi. Az egyenes és a képe ugyanakkora szöget alkot a tengellyel.

Az alsó ábra azt mutatja, hogy mi történik egy körrel és egy sokszöggel, ha a síkjuknak egy  $t$  egyenesére tükrözzük őket.



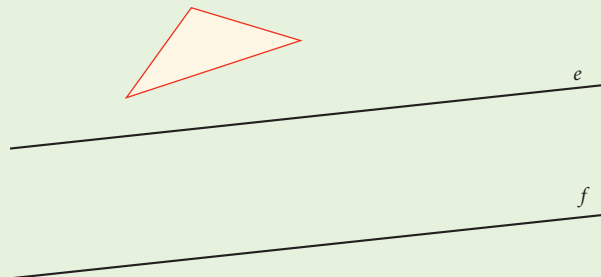
## FELADAT

- 1.** Tükrözd a háromszöget a megadott oldalfelező merőlegesére, illetve a megadott szögfelező egyenesére! Színezd ki az eredeti és a tükrözött háromszög-  
lemez metszetét! Milyen síkidomot kaptál az egyik, illetve a másik esetben?



- 2.** Vegyél fel egy kört és benne egy  $AB$  húrt! Tükrözd a kört az  $AB$  egyenesére! Hogyan kell felvenni az  $AB$  húrt, hogy a tükörkép ugyanaz a kör legyen, mint az eredeti? Mit mondhatunk ekkor a kör egy tetszőleges  $P$  pontjáról és a tükörképéről?

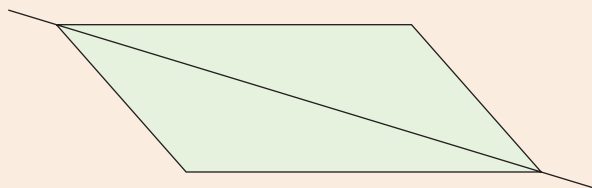
- 3.** Tükrözd a háromszöget az  $e$  egyenesre, majd a kapott tükörképet az  $e$ -vel párhuzamos  $f$  egyenesre! Milyen egyetlen transzformációval kapható meg az eredeti háromszögből a második tükrözés után kapott háromszög? A füzetedben dolgozz!



- 4.** Vegyél fel két egyenest, amelyek  $30^\circ$ -os szöget zárnak be egymással! Az egyenesek legyenek  $e$  és  $f$ , metszéspontjuk legyen  $K$ . Vegyél fel egy  $P$  pontot, amely egyik egyenesre sem illeszkedik!
- Tükrözd a  $KP$  szakaszt  $e$ -re, majd a kapott  $K'P'$  szakaszt tükrözd tovább  $f$ -re!
  - Hogyan lehetne egyetlen transzformációval megkapni  $KP$ -ből a második tükörképet?
  - Végezd el a feladatot úgy is, hogy először  $f$ -re tükrözd, majd a tükörképet  $e$ -re!
  - Gondold végig, hogyan módosul a feladat megoldása, ha  $e$  és  $f$  egyenesek szöge nem  $30^\circ$ , hanem  $40^\circ$ !

## HÁZI FELADAT

- 1.** Tükrözd a paralelogrammát az átló egyenesére! A füzetedben dolgozz!



- 2.** Vegyél fel egy derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 24 mm, másik befogója 18 mm. Tükrözd az átfogójára! Milyen alakzatot határoz meg együtt a kép és az eredeti háromszög? Mekkorára ennek a területe?

- 3.** Vegyél fel egy 3 cm oldalú négyzetet!
- Tükrözd az egyik oldalegyenesére!
  - A kapott képet tükrözd a négyzet egy másik oldalegyenesére!
  - Hány közös pontja lehet a második tükörképnek és az eredeti négyzetnek?
  - Hogyan lehetne egyetlen transzformációval megkapni az eredeti négyzetből a két tükrözés után kapott képet, ha a két tengely párhuzamos volt, és hogyan, ha a tengelyek merőlegesek voltak egymásra?
- 4.** Vegyél fel két egyenlő sugarú kört! Szerkeszd meg azt az egyenest, amelyre tükrözve az egyik kör képe a másik kör!

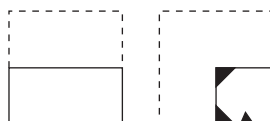
### 1. (Kompetenciamérés, 2009)

A titkos, bizalmasan kezelendő iratokra pecséttel rányomják azt, hogy „TITKOS”. A pecsételőn lévő felirat tükörképe jelenik meg a papíron. Melyik szöveget kell rátenni a pecsételőre ahhoz, hogy a pecsét helyén a TITKOS szó álljon?  
TITKOS SOKTIT LILKOS ZOXTIT

### 2. (Kompetenciamérés, 2007)

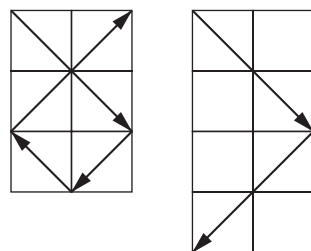
Egy négyzet alakú papírlapot kétszer összehajtottunk, majd az ábrán feketére színezett részeket kivágtuk belőle. Amikor újra kihajtogattuk, hogyan nézett ki a papírlap? Rajzold le!

1. hajtás után 2. hajtás után

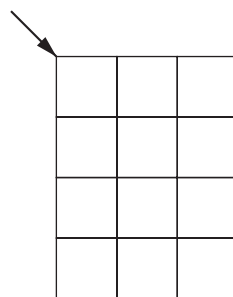


### 3. (Kompetenciamérés, 2008)

Ha egy fénysugarat egy téglatest alakú prizma bal felső sarkára irányítunk úgy, hogy az oldalegyenesekkel  $45^\circ$ -os szöget zárjon be, a fény behatol a prizmába, a prizma falairól  $45^\circ$ -os szögben mindig visszaverődik, míg eléri az egyik sarkot, ahol kilép. Erre mutat példát a két ábra.

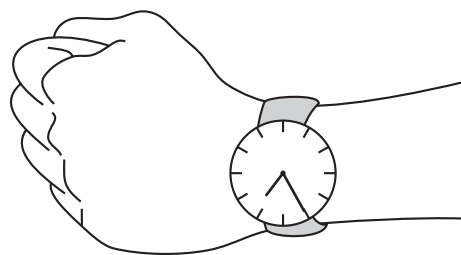


- Melyik sarokban lép ki a fény egy  $2 \times 15$ -ös prizma esetében?
- Melyik sarokban lép ki a fény egy  $3 \times 4$ -es prizma esetében?
- Keress olyan prizmat, amely esetén legalább két törés után a fénysugár a jobb alsó sarokban lép ki! Kísérletezz nagyobb prizmákkal is!



### 4. (Kompetenciamérés, 2015)

Linda vonaton ül. A vele szemben ülő utas karóráján ezt látja:  
Mennyi az idő az óra szerint?

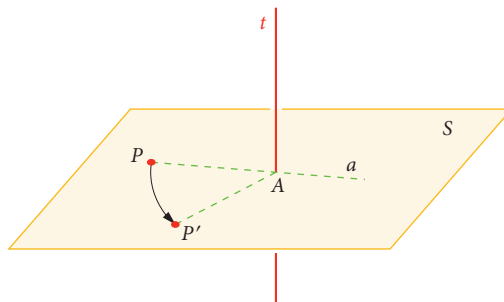


- Adott a síkon két, egymást nem metsző kör és közöttük egy egyenes. Szerkessz szabályos háromszöget, amelynek az egyenes az egyik szimmetriatengelye, és egyik csúcsa az egyik körre, egy másik csúcsa a másik körre illeszkedik! Hány megoldás lehet? Fel tudod venni az adatokat úgy, hogy ne legyen megoldás?
- Adott a síkon két pont,  $A$  és  $P$ . Tükrözd az  $A$  pontot egy  $P$ -n átmenő egyenesre! Milyen alakzatot határoznak meg azok a pontok, amelyeket úgy kapunk, hogy  $A$ -t tükrözzük a  $P$ -n átmenő összes egyenesre? Vizsgáld meg a feladatot számítógép, pl. a *GeoGebra* program segítségével!

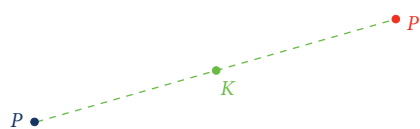
## ELMÉLET

**Az egyenes körüli forgatás**

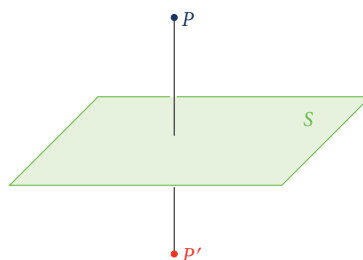
Megadunk egy egyenest, a forgástengelyt ( $t$ ), egy szöget ( $\alpha$ ) és egy forgatási irányt. Az ábra mutatja, hogyan mozdul el egy  $P$  pont a  $t$  körül:  $P$ -ből a  $t$ -re merőleges egyenest ( $a$ ) és síkot ( $S$ ) állítunk. Az  $a$  és a  $t$  metszéspontja  $A$ . A forgatás során a  $P$  az  $S$  síkban, az  $A$  középpontú,  $AP$  sugarú körön mozdul el, a megadott irány szerint úgy, hogy a  $PAP'$  szög az  $\alpha$ -val legyen egyenlő.

**Középpontos tükrözés a térben**

Megadunk egy pontot ( $K$ ). A tér minden egyes pontjához ( $P$ ) hozzárendeljük a tér egy pontját ( $P'$ ) úgy, hogy a pont és a képe által meghatározott szakasz felezőpontja a  $K$  legyen.

**A síkra való tükrözés**

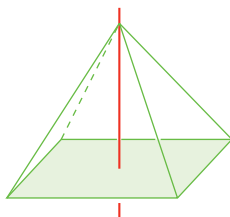
Megadunk egy síkot ( $S$ ). A tér minden egyes pontjához ( $P$ ) hozzárendeljük a tér egy pontját ( $P'$ ) úgy, hogy a pont és a képe által meghatározott szakasz merőleges legyen  $S$ -re, és e szakasz felezőpontja  $S$ -re illeszkedjen.

**Eltolás a térben**

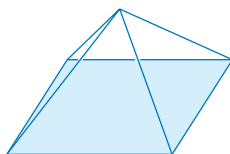
Megadunk egy *vektort*. A tér minden egyes  $P$  pontjához azt a  $P'$  pontot rendeljük, amire a  $PP'$  irányított szakasz éppen a megadott vektornak felel meg.

## FELADAT

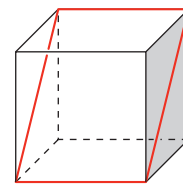
- Egy szabályos 4 oldalú gúlát elforgatunk a magasságának egyenese körül  $45^\circ$ -kal.
  - Melyik csúcs hová fordul el?
  - Milyen test az eredeti és az elforgatott gúla közös része?



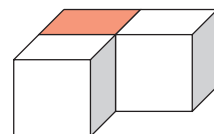
- Egy gúla alaplapja négyzet, mindegyik oldallapja szabályos háromszög. Tükrözd ezt a gúlát az alaplap középpontjára!
  - Hány lapja, hány éle és hány csúcsa van annak a testnek, amelyet a a gúla és a képe együttesen alkot?
  - Milyen másféle transzformációval kaphatnánk meg a gúlának ugyanezt a képét?



- Egy asztalra tett kockát tükrözzük
  - a fedőlapjának a síkjára;
  - az egyik oldallapjának a síkjára;
  - a pirossal jelzett átlós síkra.
 Milyen testet alkot az eredeti kocka és a tükörkép együtt?



- Egy kocka mindegyik lapjára ragasztunk egy ugyanakkora kockát úgy, hogy ezek pontosan fedik az eredeti kocka lapjait. Két ilyen kockát már berajzoltunk az ábrán.
  - Hány lapja, hány éle és hány csúcsa van a 7 kockából álló testnek?
  - Melyik kockát milyen transzformációval állíthatjuk elő az eredeti kockából kiindulva?

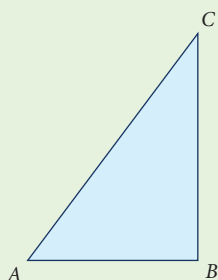


## FELADAT

Vedd fel az ábrákat a füzetedben!

1. Vedd fel az ábra szerint az  $ABC$  háromszöget, melynek oldalai:  $AB = 3$  cm,  $BC = 4$  cm és  $CA = 5$  cm.

- a) Forgasd el az  $A$  pontot a  $B$  pont körül  $-90^\circ$ -kal! A kapott pontot jelöld  $D$ -vel!
- b) Told el a  $D$  pontot az  $\overrightarrow{AB}$  vektorral! A kapott pontot jelöld  $E$ -vel!
- c) Mekkora az  $ADEC$  négyszög területe és kerülete?
- d) Vizsgáld meg a feladatot számítógép, pl. a GeoGebra program segítségével!



2. Az ábráknak megfelelően adott két egyenlő hosszú szakasz. Vedd fel a szakaszokat a füzetedbe az ábráknak megfelelően, és keress olyan transzformációkat, amelyek esetén az egyik szakasz képe a másik szakasz!

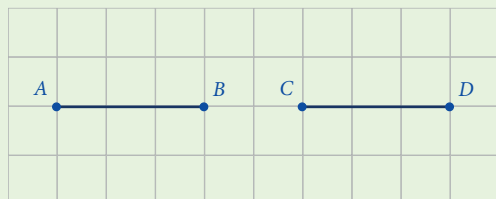
Van-e ilyen tengelyes tükrözés? Hol van a tükrözés tengelye?

Van-e ilyen középpontos tükrözés? Szerkeszd meg a középpontot!

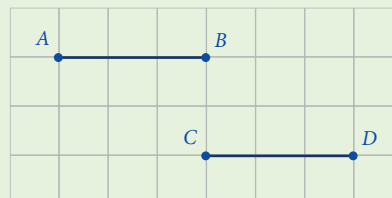
Van-e ilyen forgatás? Hány ilyen forgatás van? Szerkeszd meg a forgatások középpontját!

Van-e ilyen eltolás? Add meg az eltolás vektorát!

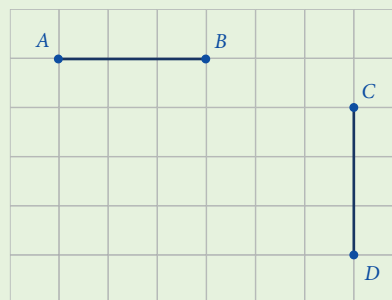
- a) A szakaszok egy egyenesre illeszkednek.



- b) A szakaszok párhuzamosak egymással.



- c) A szakaszok nem párhuzamosak egymással, és nem illeszkednek egy egyenesre.



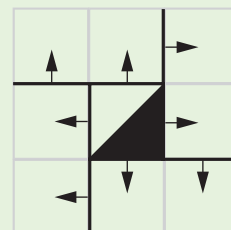
3. Vegyél fel a füzetedbe egy  $ABC$  háromszöget, melynek  $A$ -nál derékszöge van!

Szerkessz négyzeteket a háromszög  $AB$  befogójára és  $BC$  átfogójára kifelé (kifelé: ez azt jelenti, hogy nincs közös belső pontjuk a háromszöggel)! A befogóra szerkesztett négyzet csúcsai legyenek  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $E$ ; az átfogóra szerkesztett négyzet csúcsai legyenek  $B$ ,  $C$ ,  $F$ ,  $G$ , ebben a sorrendben! Ekkor  $DC$  és  $AG$  szakaszok hossza egyenlő.

- a) Szerkeszd meg az ábrát!
- b) Bizonyítsd be a  $DC$  és  $AG$  szakaszok hosszának egyenlőségét! Keress olyan forgatást, amely a  $DC$  szakaszt az  $AG$  szakaszba viszi át! Melyik pont a forgatás középpontja? Mekkora a forgatás szöge?

4. (Kompetenciamérés, 2011)

Tükrözd a következő ábra középső négyzetét a vastagon jelölt vonalak mentén a nyilak irányában, majd folytasd az így kapott alakzat tükrözését a nyilak szerint!



**Definíció:** A **geometriai transzformációk** olyan (kölsönösen egyértelmű) függvények, amelyeknek értelmezési tartománya is és értékkészlete is ugyanaz a ponthalmaz. A transzformáció során egy ponthoz hozzárendelt pontot az eredeti pont **képének** nevezzük.

**Definíció:** Ha egy transzformáció **távolságtartó**, vagyis bármely két pont távolsága ugyanakkora, mint a képek távolsága, akkor ezt **egybevágósági transzformációnak** nevezzük.

Egybevágósági transzformációk esetében az egyenes képe egy egyenes, a kör képe egy vele egyenlő sugarú kör, a szög képe egy vele egyenlő szög.

**Definíció:** Ha két ponthalmazhoz van olyan egybevágósági transzformáció, amely az egyiket a másikba viszi át, akkor ezeket a ponthalmazokat **egybevágóknak** mondjuk.

A sík egybevágóságai között fontosak:

- pont körüli forgatás,
- középpontos tükrözés,
- eltolás,
- tengelyes tükrözés.

Ha ezek közül többet végzünk el egymás után, akkor is egybevágósági transzformációt kapunk.

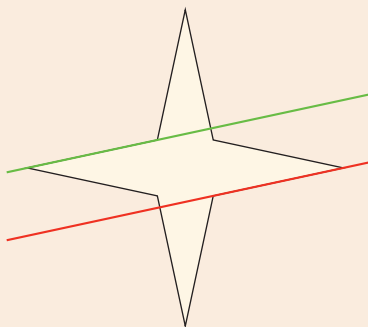


A geometriai transzformációk tulajdonságai vizsgálhatók a *GeoGebra* programmal is.

## HÁZI FELADAT

- 1.** Melyik egyenesre kell tükröznünk az ábrán látható alakzatot, hogy

- a) a zöld egyenes képe a piros egyenes legyen;
- b) a piros egyenes képe a zöld egyenes legyen;
- c) a piros egyenes képe önmaga legyen;
- d) a csillag képe önmaga legyen?



- 2.** Melyik pontra kell tükröznünk az első házi feladatban látható alakzatot, hogy

- a) a zöld egyenes képe a piros egyenes legyen;
- b) a piros egyenes képe a zöld egyenes legyen;
- c) a zöld egyenes képe önmaga legyen;
- d) a csillag képe önmaga legyen?

- 3.** Melyik pont körül és mekkora szöggel forgathatjuk el az első házi feladatban látható csillagot, ha azt akarjuk, hogy

- a) a képe önmaga legyen;
- b) minden pontjának a képe önmaga legyen?

- 4.** Egy 5 cm oldalú négyzetet először 24 mm-rel balra, majd 45 mm-rel felfelé toltunk el.

- a) Szerkeszd meg az eredeti négyzetet és az eltoló képet!
- b) Rajzold be azt az egyetlen eltolásvektort, amivel a két lépés helyettesíthető!
- c) Milyen hosszú ez a vektor? Mérd meg, majd igazold az eredményt számítással is!

- 5.** Válaszolj a kérdésekre!

- a) Melyik transzformáció esetén igaz, hogy minden pont képének a képe az eredeti pont?
- b) Melyik transzformáció esetén igaz, hogy minden egyenes képének a képe az eredeti egyenes?



## CSOPORTMUNKA

Fedezzétek fel, melyik egybevágósági transzformáció ismerhető fel a következő példákban!  
Az ábrákat vedd fel a füzetedben!

**1.** Két kistelepülés (A és B) közelében egyenes országút fekszik.

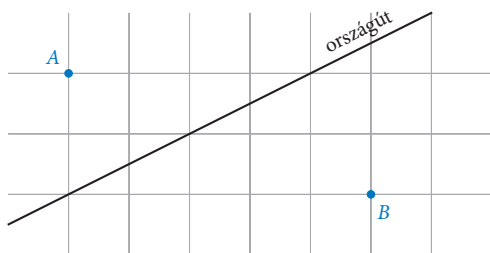
**a)** A két település között összekötő utat építenek. Milyen hosszú ez az út, ha a lehető legrövidebbre tervezik? (A négyzetháló km-beosztású.)

Az országút mentén megállót építenek a távolsági busz számára. Hol legyen a megálló, hogy

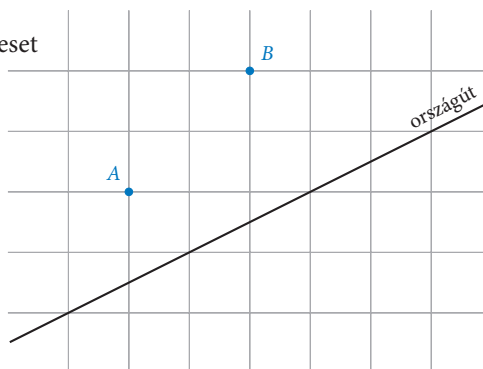
**b)** a B településhez a legközelebb legyen? Mekkora ez a távolság? Mekkora távolságra van a megálló az A településtől ebben az esetben?

**c)** az A-ból B-be vezető, a megállót is érintő út hossza a legrövidebb legyen? Mekkora ennek a legrövidebb útnak a hossza?

I. eset



II. eset



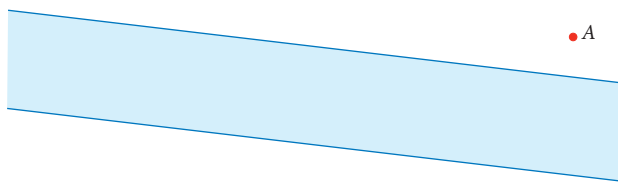
**2.** Egy folyó két partján van két falu: A és B. Hová építsék a hidat, hogy

**a)** A-hoz a legközelebb legyen;

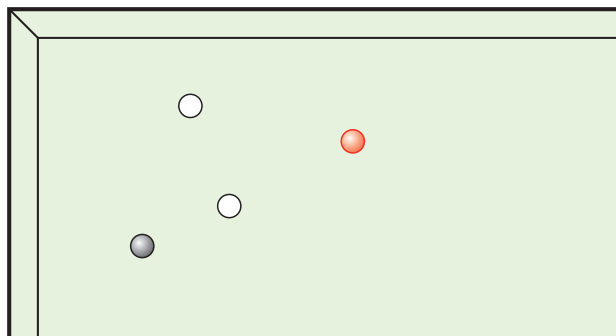
**b)** A-ból a legrövidebb úton lehessen B-be jutni?

**c)** A hídépítés magas költségei miatt csak a folyópartra merőleges hidat építenek. Hová építsék a hidat, hogy a legrövidebb úton lehessen A-ból B-be jutni?

(Gondold végig azt az esetet, amikor a települések a folyóparthoz képest ugyanígy helyezkednek el, de sokkal keskenyebb a folyó. Majd kezd el fokozatosan növelni a folyó szélességét!)



**3.** A piros biliárdgolyóval kell eltalálni a feketét úgy, hogy a piros golyó más golyóhoz nem érhet hozzá, de a biliárdasztalnak a rajzon látható két fala is használható. Hány megoldása van ennek a problémának?

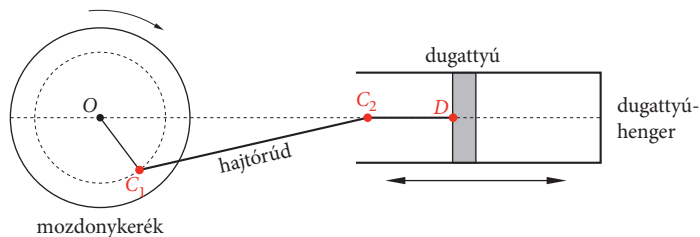


4. A gőzmozdonyok kerekét csuklós szerkezettel hozzák forgásba. Ennek leegyszerűsített változata látható az ábrán. A  $C_1$  pont a mozdonykerékhez van rögzítve, a  $C_2$  pont pedig a dugattyúrúd végéhez. A merev hajtórúd a  $C_1$  és  $C_2$  pontok körül is elfordulhat (csuklós szerkezet).

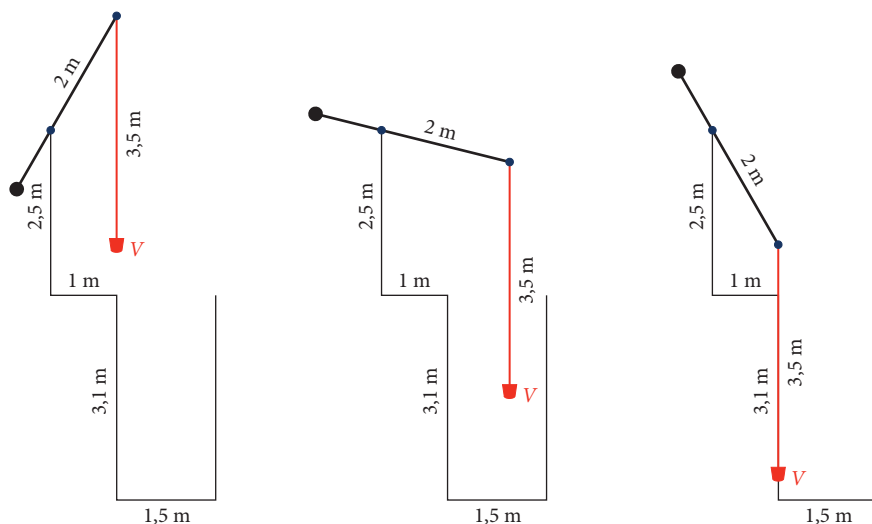


A mozdonytesthez rögzített hengerben a dugattyú csak „vízszintesen” mozoghat.

- Milyen mozgást végez a dugattyú, ha hatására a  $C_1$  pont  $360^\circ$ -ot fordul az  $O$  körül?
- Szerkeszd meg a dugattyú két szélső helyzetét a hengerben! Mekkora a két szélső helyzet távolsága? (Segít az  $O$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  és  $D$  pontok megszerkesztése!)
- Szerkeszd meg a dugattyú helyzetét abban az esetben, amelyben az  $OC_1$  merőleges az  $OC_2$ -re! Igaz-e, hogy a dugattyú ekkor éppen „félúton” van a két szélső helyzete között?



5. Egy gémeskút működésének három mozzanatát mutatják az ábrák.



Az ágas a kút szélétől 1 m-re van a földbe állítva, ezen a gém (vízszintes) forgástengelye 2,5 m magasan van a földtől. A gémnek a kút fölé belógó része a forgástengelytől mérve 2 m hosszú, a kút 3 m-nél mélyebb, szélessége 1,5 m.

- Milyen magasan van a talajszint felett  $V$  az első helyzetben?
- Milyen mélyen van  $V$  a talajszint alatt a harmadik helyzetben?
- Szerkeszd meg a második ábrán azt a pályát, amelyen a  $V$  mozog, amíg az első helyzetből a harmadik helyzetbe jut!



Szerkeszd meg ezt a feladatot egy számítógépes szerkesztő programmal, pl. a GeoGebra programmal!

6. (Kompetenciamérés, 2013)

Anna a fodrásznál ülve az előtte lévő tükörben meglátta a falóra tükörképét, és rögtön tudta, hogy nem fogja elérni a 20 perc múlva kezdődő mozifilm.

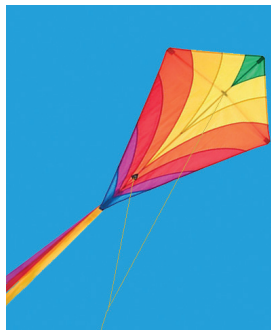
Az óra tükörképe az ábrán látható.

- Hány órákor kezdődik a mozifilm?
- Rajzold le, mit láthatott a tükörben a fodrász 3 óra 12 perccel korábban?



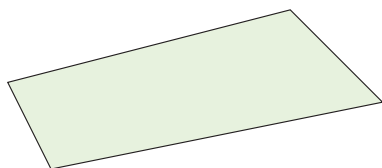
## BEVEZETŐ

Vannak-e szimmetrikusak az alábbi képeken felismerhető négyszögek között? Ha igen, milyen szimmetriákat találasz?

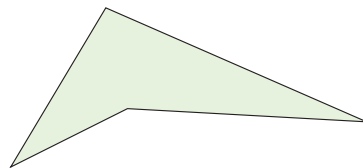


## ELMÉLET

## A négyszögek csoportosítása



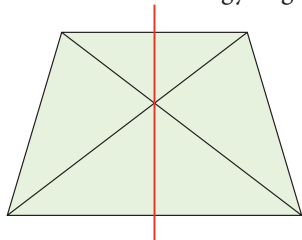
**konvex négyszög**  
(minden szöge kisebb egy egyenesszögnél)



**konkáv négyszög**  
(van olyan szöge, amelyik nagyobb egy egyenesszögnél)

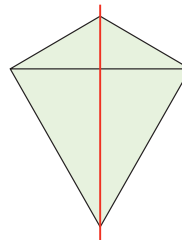
Minden négyszögre igaz: a belső szögek összege  $360^\circ$ .

## Tengelyesen szimmetrikus négyszögek



**húrtrapéz**

- az alapoktól különböző két oldal egyenlő, ezek a szárak;
- az egy alapon fekvő szögek egyenlők;
- a szemközti szögek összege  $180^\circ$ ;
- az átlók egyenlő hosszúak, a szimmetriatengelyen metszik egymást;
- van olyan kör, amelyik mindegyik csúcsán átmegy.

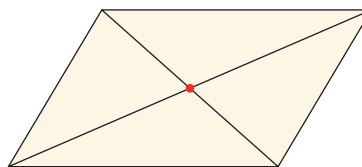


**deltoid**

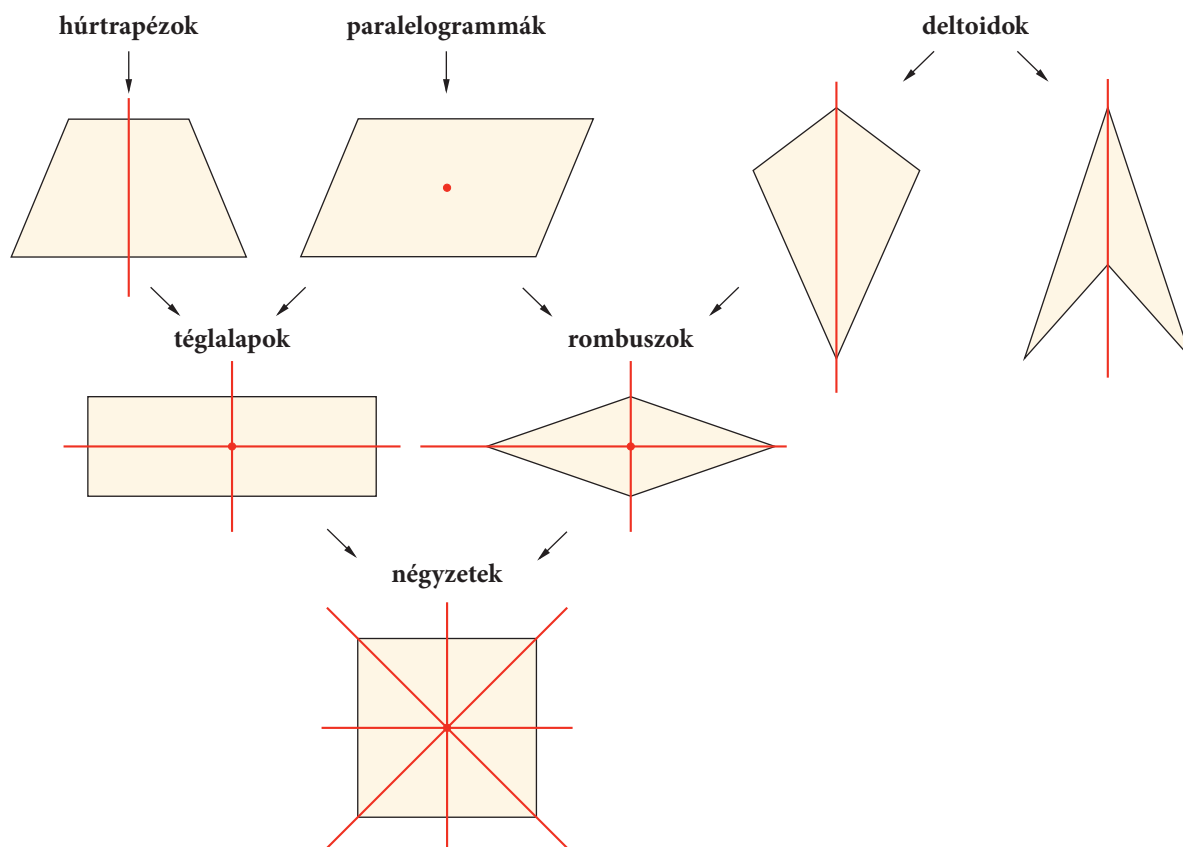
- két-két szomszédos oldala egyenlő;
- két szemközti szöge egyenlő;
- az átlói merőlegesek egymásra;
- a szimmetriatengelyen lévő átló felezi a másik átlót és a deltoid két szögét.

Középpontosan szimmetrikus négyszög: **paralelogramma**.

- két-két szemközti oldala egyenlő;
- két-két szemközti szöge egyenlő;
- két-két szemközti oldala párhuzamos;
- a szomszédos szögek összege  $180^\circ$ ;
- átlói felezik egymást.



A szimmetrikus négyszögek csoportosítása



## FELADAT

**1.** A szimmetrikus négyszögeket szemléltető ábra alapján dönts el, melyek igazak az alábbi kijelentések közül!

- A: Minden rombusz deltoid.
- B: Minden téglalap rombusz.
- C: Van olyan téglalap, amelyik rombusz.
- D: Minden négyzet paralelogramma.
- E: Minden tengelyesen szimmetrikus trapéz paralelogramma.
- F: Ha egy négyszög középpontosan is és tengelyesen is szimmetrikus, akkor az téglalap.
- G: Ha egy tengelyesen szimmetrikus trapéz középpontosan is szimmetrikus, akkor az téglalap.
- H: Minden négyzet deltoid.

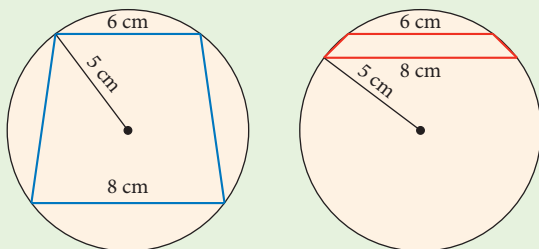
- I: Van olyan téglalap, amely paralelogramma.
- J: Van olyan deltoid, amely paralelogramma.

**2.** Egy háromszög oldalai 36 mm, 77 mm és 85 mm hosszúak.

- a) Igazold, hogy a háromszög derékszögű!
- b) Tükrözd a háromszöget az átfogó felezőpontjára. Milyen síkidomot alkot együtt a két háromszög? Mekkora a területe?
- c) Tükrözd a háromszöget az átfogó egyenesére! Milyen síkidomot alkot együtt a két háromszög? Mekkora a területe? Milyen hosszúak az átlói?

3. Hányféle olyan négyszög van, amelynek két egymás melletti oldala 24 mm, a másik kettő pedig 35 mm hosszú?

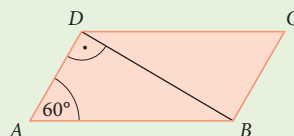
4. Egy 5 cm sugarú kör két párhuzamos húrjának hossza 6 cm, illetve 8 cm. Sorban összekötjük a két húr négy végpontját. Milyen négyszöget kapunk? A hurok kétféleképpen helyezkedhetnek el a körben, ezért kétféle négyszög keletkezhet. Készítsd el az ábrákat a füzetedben!



a) Van-e a két négyszögnek szimmetriatengelye? Ha van, akkor melyik egyenes?

- b) Mekkora távolságra van a két párhuzamos húr a kör középpontjától?  
c) Mekkora a két párhuzamos húr távolsága?  
d) Mekkora a négyszög ismeretlen oldalai?

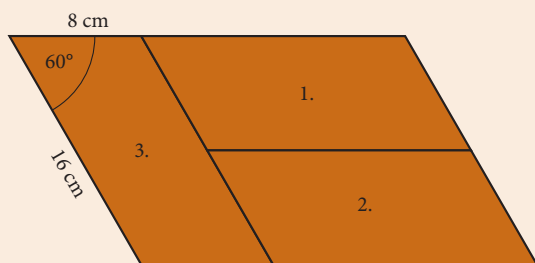
5. Legyen az  $ABCD$  paralelogramma  $BD$  átlója merőleges az  $AD$  oldalra. A paralelogramma  $A$ -nál levő szöge  $60^\circ$ . Az  $AB$  oldal hossza 5,2 cm. Keresd meg a nevezetes háromszöget az ábrán! Ennek tulajdonságai alapján számold ki a következőket:



- a) Milyen hosszú a  $BD$  átló?  
b) Milyen hosszú a paralelogramma többi oldala?  
c) Mekkora a paralelogramma területe?  
d) Milyen hosszú a paralelogramma két magassága?

## HÁZI FELADAT

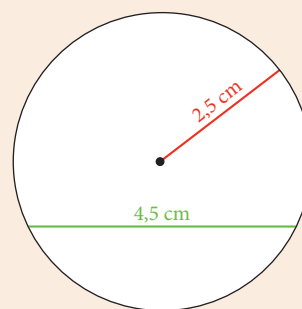
1. Bence szobájában olyan a parketta, hogy három egyforma parkettadarabot az ábra szerint helyeztek el, majd az így kapott nagyobb „paralelogramma” ismétlődik.



Bence azon gondolkodik, hogy milyen egybevágósági transzformációval vihetők át egymásba a paralelogrammák. Adj meg olyan egybevágósági transzformációt (vagy több, egymás után elvégzett transzformációt), amelyik

- a) az 1. jelűt a 2. jelűbe;  
b) az 1. jelűt a 3. jelűbe;  
c) a 3. jelűt a 2. jelűbe viszi át!

2. Szerkessz húrtrapézt a füzetedben, ha a körülírt körének sugara 2,5 cm, hosszabbik alapja 4,5 cm, rövidebb alapja pedig 3 cm hosszú! Hány különböző (azaz nem egybevágó) trapéz szerkeszthető?

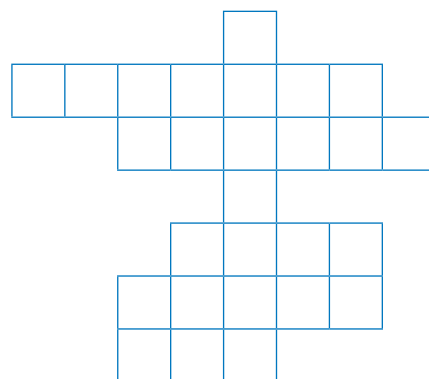


3. Egy rombusz beírható köre 1,8 cm sugarú, hosszabbik átlója 8,2 cm. Szerkessz meg a rombuszt!  
4. Szerkessz olyan húrtrapézt, amelynek a 6 cm-es alapján fekvő szögei  $60^\circ$ -osak, és a szárjai 2 cm hosszúak! Mekkora a rövidebb alapja? Hány szabályos háromszögre bontható ez a trapéz?

## 1. Igaz vagy hamis?

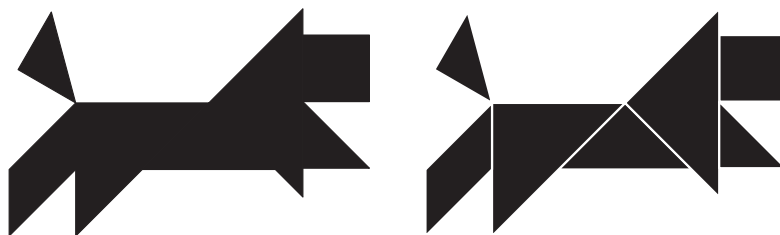
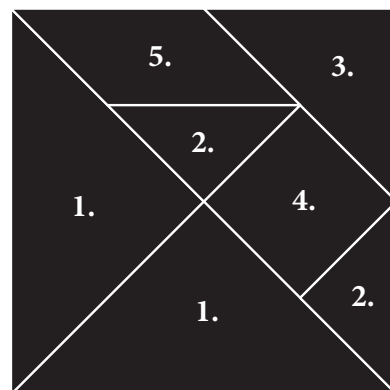
A helyes válaszhoz tartozó szót írd be a keresztrejtvény megfelelő sorába! A függőleges oszlop egy híres magyar festő vezetéknévét rejt. Ki ő?

|                                                                                                                                                                                                       | Igaz    | Hamis   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------|
| Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói merőlegesen felezik egymást.                                                                                                                                    | ÁTLÓ    | SZÖG    |
| Az eltolás mindig előállítható két, egymással párhuzamos egyenesre való tükrözés egymásutánjával.                                                                                                     | KONVEX  | TRAPÉZ  |
| Ha egy alakzatot egy $O$ pont körül forgatunk $+60^\circ$ -kal, majd a képet elforgatjuk $O$ körül $+120^\circ$ -kal, akkor a két forgatás utáni kép középpontosan szimmetrikus az eredeti alakzatra. | CSÚCS   | OLDAL   |
| Ha egy kört eltolunk egy olyan vektorral, amelynek hossza megegyezik a kör sugarával, akkor az eredeti körnek és a képének pontosan egy közös pontja lesz.                                            | DELTOID | TENGELY |
| Van olyan deltoid, amelynek pontosan 3 szimmetriatengelye van.                                                                                                                                        | KÉP     | KÖR     |



2. A tangram egy ősi kínai kirakójáték. A játék célja: 7 „tangramkő” segítségével kirakni különböző alakzatokat, illetve megfejteti, hogy egy megadott alakzatban hogyan helyezkednek el a kövek. A játékhoz 7 „kő” szükséges, amelyek egy négyzet feldarabolásával keletkeznek. Ezt mutatja az ábra. A kövek egyik oldalát beszámoztuk, az egyforma számok egybevágó alakzatokat jelölnek.

- a) Melyik tangramkőnek van egynél több szimmetriatengelye?  
 b) Az alábbi ábra a „kutya” alakzatot ábrázolja, illetve azt, hogyan lehet kirakni tangramkövekből. Melyik tangramkő az, amelyet mindenképp a beszámozott oldalával lefelé kell fordítani ahhoz, hogy kirakhassuk a „kutya” alakzatot?



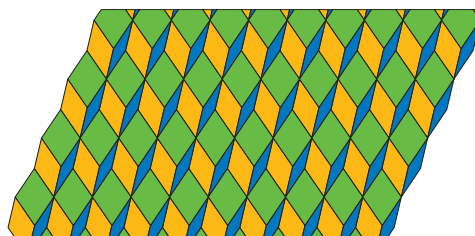
- c) Rakj ki az összes tangramkő felhasználásával paralelogrammát, húrtrapézt, téglalapot! (Ha nincs tangramkészleted, vágd ki kemény papírból az alakzatokat!)
- d) A tangram kirakójátékhoz több különleges feladvány kapcsolódik. Ezek közé tartozik a „két szerzetes paradoxona”, illetve a „törött váza paradoxon”. Nézz utána az interneten, hogy melyik feladványokat nevezik így!

## BEVEZETŐ

A képen egy előszoba padlójának szokatlan, de érdekes mintájú burkolatát látjuk. A térbeli hatást különböző színű és állású rombuszok lerakásával érték el. Ezek a rombuszok mind egybevágók, szögeik 60, illetve 120 fokosak.



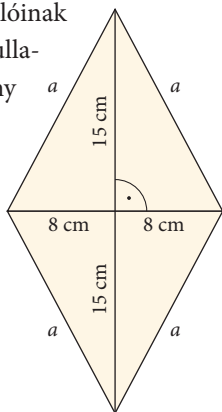
Megváltoztathatjuk a térhatást különböző rombuszok ügyes alkalmazásával, például így.



Ha egy „szokásos”, téglalap alakú helyiséget akarunk így burkolni, akkor tisztában kell lennünk a rombuszok oldalainak, átlóinak, magasságának és területének viszonyaival.

## KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Egy rombusz alakú járólap átlóinak hossza: 16 cm és 30 cm. A hulladékot nem számítva kb. hány ilyen járólap kell egy 6 m<sup>2</sup>-es fürdőszobapadló burkolásához?



## Megoldás

Először számítsuk ki egy rombusz területét!

Tudjuk, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra, és kölcsönösen felezik egymást, így a rombuszt 4 egybevágó derékszögű háromszögre osztják fel.

Ezért a rombusz területe:  $T = 4 \cdot \frac{15 \cdot 8}{2} = 240 \text{ (cm}^2\text{)}.$

A 6 m<sup>2</sup>-es (60 000 cm<sup>2</sup>) fürdőszobához – hulladék nélkül –  $\frac{60\,000}{240} = 250$  darab járólapra lesz szükség.

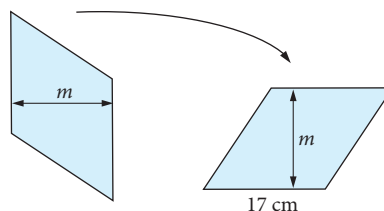
2. Számítsuk ki az előző feladatban szereplő rombusz magasságát!

## Megoldás

Először számítsuk ki a rombusz oldalának hosszát!

A Pitagorasz-tétel értelmében:

$a^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 = 17^2$ , tehát a rombusz oldala:  $a = 17 \text{ (cm)}.$



A rombusz területét az *oldal · magasság* képlettel is kiszámíthatjuk:

$$T = a \cdot m$$

$$240 = 17 \cdot m,$$

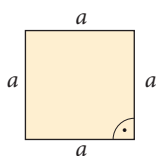
ebből a magasság  $m = 240 : 17 \approx 14,12 \text{ cm}$ , ezt kell tehát figyelembe venni, amikor az egymás mellé elhelyezhető járólapok számát kalkuláljuk.



## ELMÉLET

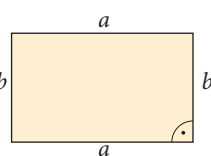
Tekintsük át a nevezetes négyszögek területéről tanultakat!

négyzet



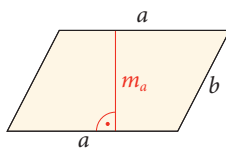
$$T = a^2$$

téglalap



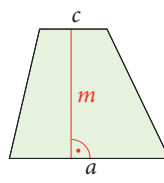
$$T = a \cdot b$$

paralelogramma



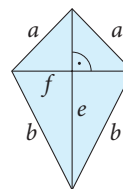
$$T = a \cdot m_a$$

trapéz



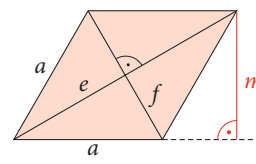
$$T = \frac{(a + c) \cdot m}{2}$$

deltoid



$$T = \frac{e \cdot f}{2}$$

rombusz

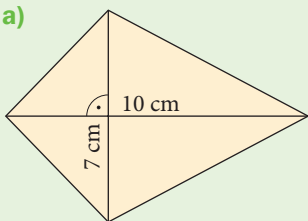


$$T = a \cdot m = \frac{e \cdot f}{2}$$

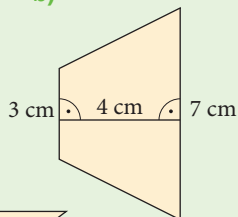
## FELADAT

1. Számítsd ki az alábbi alakzatok területét!

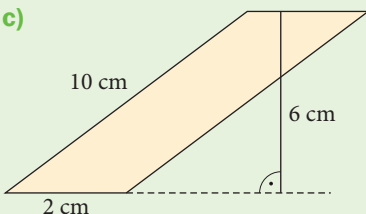
a)



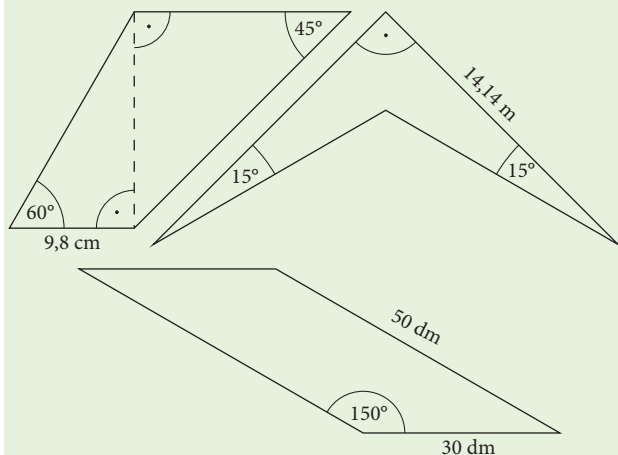
b)



c)



2. Számítsd ki a trapéz, a deltoid és a paralelogramma területét!



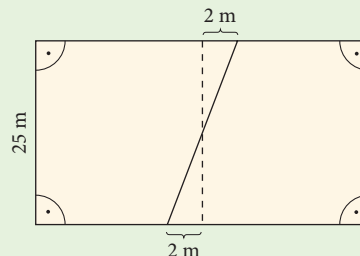
3. Egy rombusz kerülete 48 cm. Lehet-e a területe

- a) 48 cm<sup>2</sup>; c) 0,1 cm<sup>2</sup>;  
b) 150 cm<sup>2</sup>; d) 144 cm<sup>2</sup>?

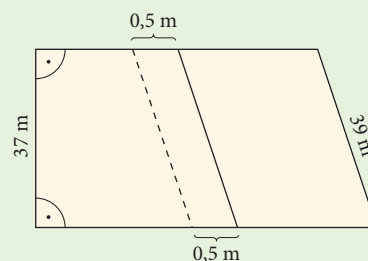
Ha lehet, akkor mekkora a rombusz magassága?

4. Két szomszédos telek határvonalát az ábra szerint módosítani kellett. Hány m<sup>2</sup>-rel változott a telek területe? (Szaggatott vonallal az eredeti, folytonossal az új határvonalat jelöli az ábra.)

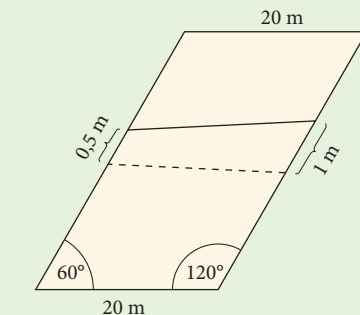
a)



b)



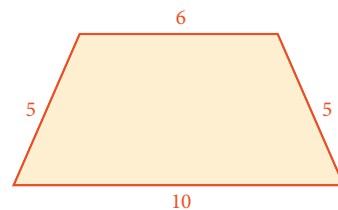
c)



## KIDOLGOZOTT FELADAT



3. Egy különlegesen nagy csoki csomagolása egy egyenes hasábot formáz, amelynek keresztmetszete szimmetrikus trapéz (lásd a rajzot). A csoki hosszúsága 25 cm, a trapéz méreteit az ábrán láthatod. Hány  $\text{cm}^2$  a csokidoboz külső felszíne? Válaszodat  $\text{cm}^2$ -ben, egészre kerekítve add meg!



### Megoldás

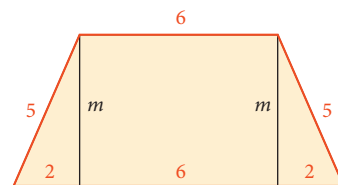
A doboz külső felszíne négy téglalapról és két trapézból áll. A téglalapok egyik oldala 25 cm, a másik oldala pedig a trapéz valamelyik oldala. Így ezek területei összesen:  $T_1 = 5 \cdot 25 + 6 \cdot 25 + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 25 = 25 \cdot (5 + 6 + 5 + 10) = 25 \cdot 26 = 650 \text{ (cm}^2\text{)}$ . A szimmetrikus trapéz területéhez szükségünk van a magasságára. Ha a rövidebb alap végpontjaiból meghúzzuk a magasságvonalakat, a trapéz másik alapját felosztottuk egy 6 cm-es középső, és két azonos hosszúságú, 2-2 cm hosszú szakaszra. Így mindkét oldalon kapunk egy-egy derékszögű háromszöget, amelynek egyik befogója 2 cm, átfogója pedig a trapéz szára, vagyis 5 cm.

A magasság Pitagorasz-tétellel kiszámítható:  $m^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$ .

Ebből  $m \approx 4,58$  cm.

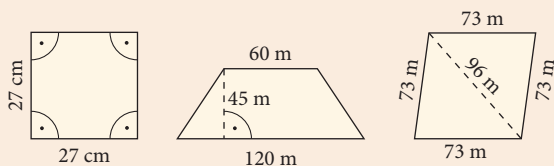
A trapéz területe:  $T_2 = \frac{10+6}{2} \cdot 4,58 = 36,64 \text{ (cm}^2\text{)}$ .

A doboz felszíne tehát:  $T_1 + 2T_2 = 723,28 \text{ cm}^2 \approx 723 \text{ cm}^2$ .

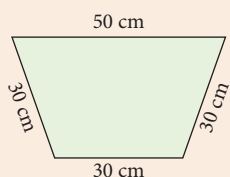


## HÁZI FELADAT

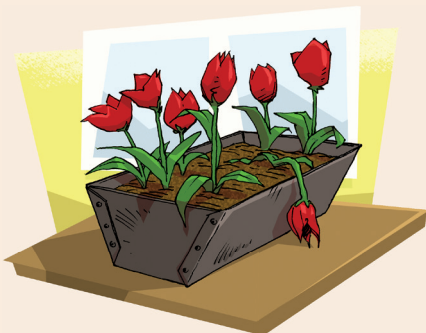
1. Számítsd ki a négyszögek területét!



2. Egy (egyenes hasáb formájú) bádóg virágláda keresztmetszete húrtrapéz. A láda hossza 1,2 m.



- Hány  $\text{m}^2$  a virágláda külső felszíne?
- Hány  $\text{m}^2$  anyagot kellett felhasználni a készítéséhez, ha a gyártás során a rendelkezésre álló bádóg 20%-a hulladék lett?

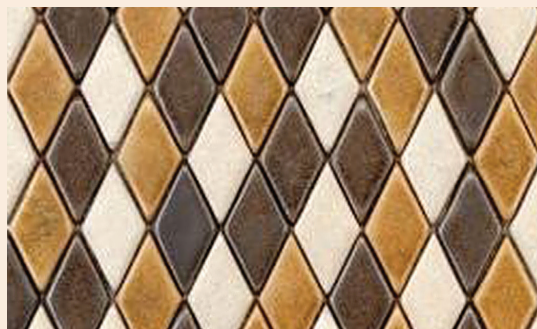


3. Egy 60 cm-es és egy 40 cm-es nádszál felhasználásával deltoid alakú papírsárkányt készítünk. (A nádszálak a deltoid átlói.)

- Mekkora lesz a sárkány területe?
- Mekkora lesz a sárkány kerülete, ha a nádszálak felezik egymást?
- Mekkora a sárkány kerülete, ha a 40 cm-es nádszál felezőpontja a 60 cm-es nádszálat 2 : 1 arányban osztja két részre?

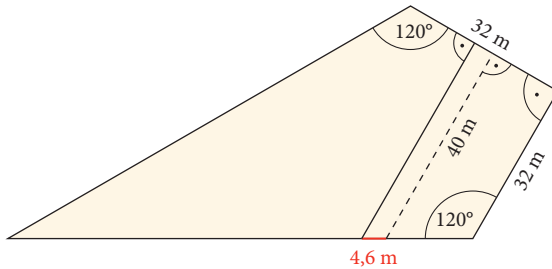
4. A fürdőszobában  $3,6 \text{ m}^2$ -es részt szeretnénk mozaiklapokkal burkolni. Erre még 5%-ot rá kell számítanunk a darabolások, törések és anyaghiba miatt.

- Hány  $\text{m}^2$ -re kell burkolóanyagot beszerezni?
- 10 cm oldalú, rombusz alakú mozaiklapokat veszünk, amelyek hegyesszöge  $60^\circ$ -os. Hány darabra van szükségünk?



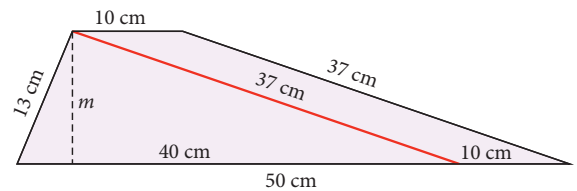
## EMELT SZINT

- 1.** Két szomszédos telek határvonalát az ábra szerint módosítani kellett. Hogyan változott a telkek területe? (Szaggatott vonallal az eredeti, folytonossal az új határvonalat jelöli az ábra.)



A következő feladatokban használd Héron képletét! (Héron képletét megtalálod az 50. leckében)

- 2.** a) Egy paralelogramma oldalai 24 cm és 18 cm hosszúsúak, egyik átlója 12 cm. Számítsd ki a területét!  
 b) Egy paralelogramma átlói 24 cm és 18 cm hosszúsúak, egyik oldala 12 cm. Számítsd ki a területét!
- 3.** Egy trapéz alapjai 50 cm és 10 cm, szárjai 37 cm és 13 cm hosszúsúak. Mekkora a területe? Segít az ábra!



- 4.** Egy szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) hosszabbik alapja 44 cm, szárjai 17 cm-esek, átlói 39 cm-esek. Mekkora a területe?

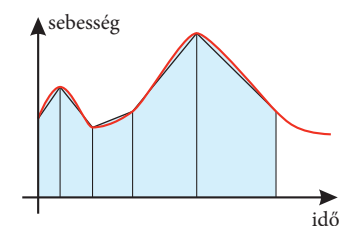
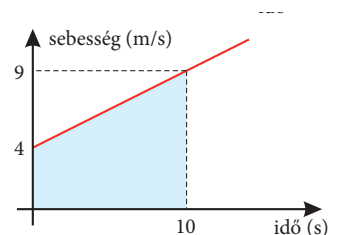
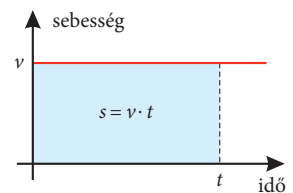
## RÁADÁS

Fizikusok kedvelt módszere bizonyos mennyiségek értékének megállapítására, hogy az adott jelenséget leíró függvény grafikonja alatti területet vizsgálják. Például egyenes vonalú egyenletes mozgás esetén – egy bizonyos  $t$  időpontig vizsgálódva – a görbe alatti terület mérőszáma megegyezik a megtett út nagyságának mérőszámával.

A gondolatmenet kiterjeszthető olyan mozgásokra is, ahol a sebesség változik, ennek elméleti háttérével és gyakorlati módszereivel az *integrálszámítás* foglalkozik.

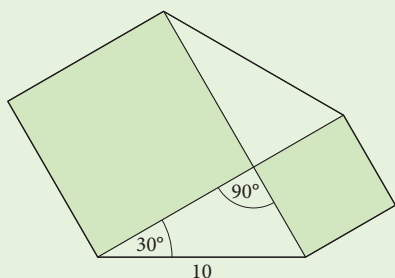
Egyenletes gyorsulásnál a sebesség nagysága egyenletesen változik, ilyenkor a görbe alatti terület trapéz. A grafikonon bemutatott mozgás esetén pl. a trapéz „alapjai” 4 és 9 egység hosszúsúak, „magassága” 10 egység, ezek alapján a terület pedig  $T = \frac{4+9}{2} \cdot 10 = 65$ , a megtett út tehát ebben az esetben 65 m.

Trapézokkal közelíthető szinte bármilyen tetszőleges „görbe alatti” terület. Minél több trapézt használunk, annál pontosabban tudjuk becsülni a tényleges területet.



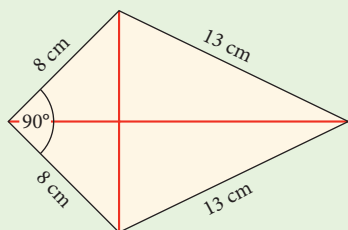
## FELADAT

1. Az ábrán egy sokszöget állítottunk össze két négyszetből és két háromszögből.



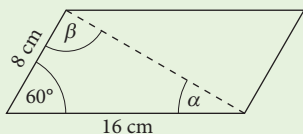
- Hány oldalú ez a sokszög, és hány átlója van?
- Van-e szimmetriatengelye, szimmetria-középpontja?
- Mennyi a belső szögeinek összege?
- Mekkora az oldalai, a szögei, és mekkora a leg-hosszabb átlója?
- Mekkora a kerülete és a területe?

2. Egy rézlemez konvex deltoid alakú. Az oldalainak a hosszúsága 13 cm és 8 cm. A két rövidebb oldal merőleges egymásra.

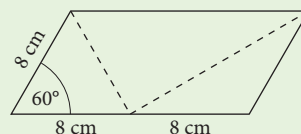


- Mekkora a deltoid átlói?
- Mekkora a rézlemez területe?
- Legalább hány százalék a hulladék, ha téglalap alakú lemezből vágják ki a deltoidot?

3. a) Megrajzoltuk az ábra szerinti paralelogramma átlóját. Mekkora az  $\alpha$  és a  $\beta$ ? Milyen hosszú a megrajzolt átló?



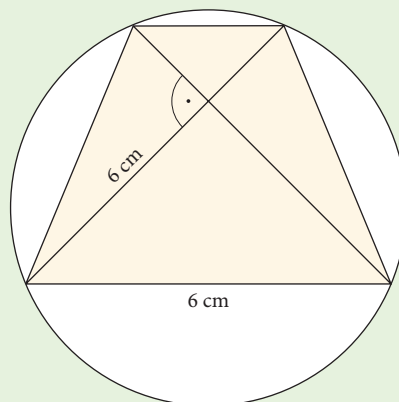
- b) Az ábra szerint három részre bontottuk a paralelogrammát. Mekkora a keletkezett háromszögek szögei és oldalai?



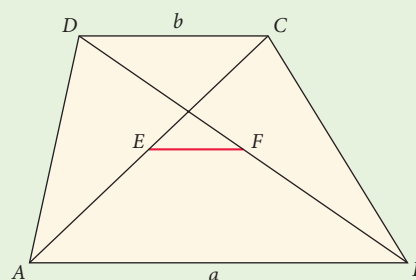
- c) Mekkora a paralelogramma területe?

4. Egy húrtrapéz hosszabbik alapja és átlói is 6 cm hosszúak. Az átlók merőlegesek egymásra.

- Szerkeszd meg a trapézt!
- Mekkora a trapéz szögei, mekkora a kerülete és a területe?

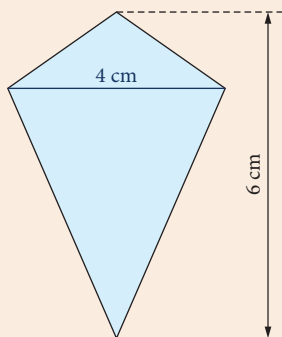


5. Az  $ABCD$  trapéz átlóinak felezőpontjai  $E$  és  $F$ . Milyen hosszú az  $EF$  szakasz, ha a trapéz két alapja  $a$  és  $b$ ?

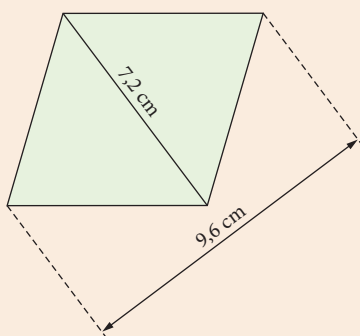


## HÁZI FELADAT

- 1.** Szerkessz konvex deltoidot a füzetedben, amelynek átlói 4 cm, illetve 6 cm hosszúak, egyik szöge  $120^\circ$ -os, a másik három szöge ettől különböző! Hány különböző (azaz nem egybevágó) deltoid szerkeszthető? Mekkora ezeknek a területe?

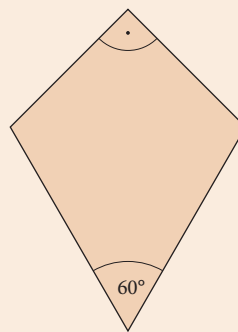


- 2.** Egy rombusz rövidebb átlója 7,2 cm, hosszabb átlója 9,6 cm hosszú. Számítsd ki a rombusz kerületét és területét!

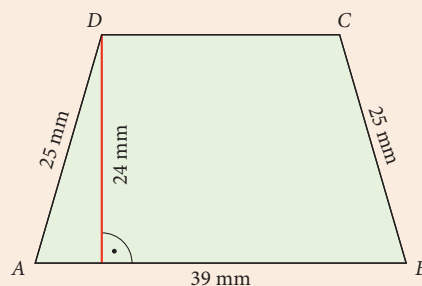


- 3.** Egy konvex deltoidnak egyetlen derékszöge és egyetlen  $60^\circ$ -os szöge van.

- a) Mekkora a deltoid másik két szöge?  
b) Mekkora lehet a deltoid kerülete és területe, ha két oldala 18,4 cm hosszú?



- 4.** Az ABCD négyszög két oldala párhuzamos, a másik kettő egyenlő, de nem párhuzamos.



- a) Szerkessz meg ezt a négyszöget!  
b) Sorold fel a tulajdonságait!  
c) Mekkora az ismeretlen oldal?  
d) Mekkora a négyszög területe?  
e) Mekkora a négyszög átlói?

## RÁADÁS

- 1.** Az ABCD deltoid oldalai 4 cm és 6 cm hosszúak, a két 4 cm-es oldal között pedig  $60^\circ$ -os szög van. A deltoidot az átlóival négy háromszögre bontottuk. A háromszögek köré írható körök középpontjai egy négyszöget határoznak meg. Mekkora ennek a négyszögnek a területe és a kerülete?
- 2.** Négy egyforma rudat csuklókkal egymáshoz kapcsolunk, majd az utolsó szabad végét az első szabad végével illesztjük össze. Így egy olyan keretet kapunk, amely mindig rombusz alakú, de csuklókkal mozgatható. Egyik rúdját a talajon tartjuk. Milyen pályán mozog a rombusz átlóinak metszéspontja, miközben a keretet mozgatjuk?



## FELADAT

1. Egy szökőkút medencéje négyzet alakú talapzaton áll. A talapzat köré – az ábra szerint – szabályos nyolcszög alakban szeretnének díszburkolatot építeni. A talapzat oldalai 3 méter hosszúak. Mekkora a díszkövel borítandó vízszintes felület?

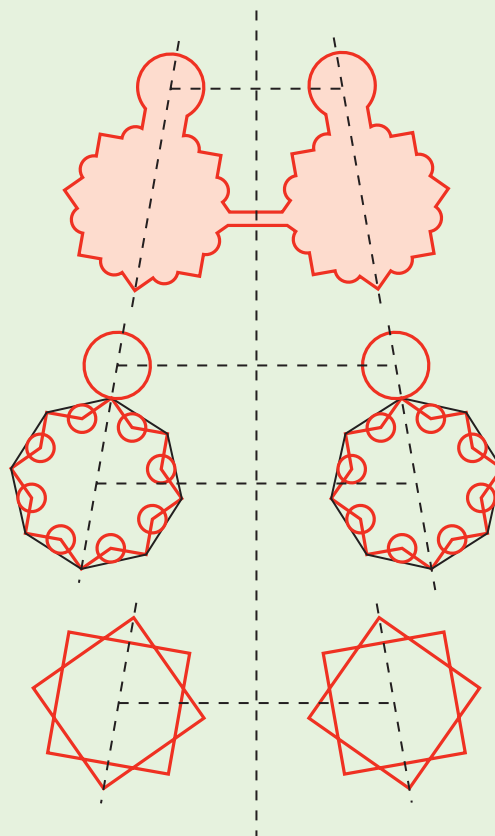


2. A Malajzia fővárosában, Kuala Lumpurban felépült Petronas ikertornyokat a modern építészet egyik csodájaként tartják számon. A tornyok alaprajzához – az egymásba kapcsolódó négyzetekhez és körökhöz – az ország uralkodó vallása, az iszlám építészeti stílusa adott ihletet.

Szerkeszd meg a bemutatott alaprajzot egy 15 cm oldalú négyzetből kiindulva!

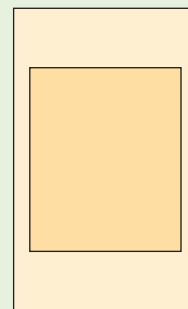


- Fordasd el a négyzetet a középpontja körül  $45^\circ$ -kal!
- Kösd össze a két négyzet csúcsait, így egy szabályos nyolcszöget kapsz!
- Szerkessz olyan köröket, amelyeknek középpontja a két négyzet egy-egy oldalának a metszéspontja és érintik a nyolcszög oldalait!



- 3** 📡 Az asztalos összecuszkható étkezőasztalt készít. Az asztal kinyitva a külső téglalapot formázza, felére összecuszkva és elfordítva pedig a belső téglalapot. A kinyitott asztal hosszabbik oldala 180 cm, rövidebbik oldala 120 cm.

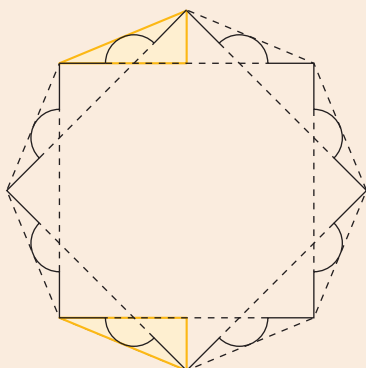
- a) Hány fokos szöggel kell elforgatni a kettéhajtott asztallapot?  
b) Hova kell szerelni a csapszeget, amely körül a félbehajtás után elforgatjuk az asztallapot?



## HÁZI FELADAT

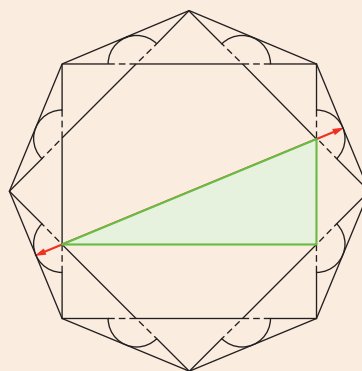
A házi feladatok a Petronas tornyokkal kapcsolatosak. A kérdések arra az alaprajzra vonatkoznak, amelyet a tanóra 2. feladatában leírt módon, 15 cm oldalú négyzetből kiindulva kaphatsz.

- 1** 📡 Mekkora a „külső” szabályos nyolcszög oldalai? (Figyeld meg a narancssárga háromszögek oldalait!)



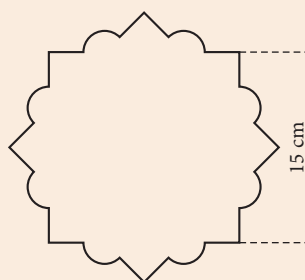
- 2** 📡 Mekkora a „külső” szabályos nyolcszög két szemközi oldala közötti távolság?

- 3** 📡 Mekkora a „belső” szabályos nyolcszög két szemközi csúcsa közötti távolság? (Figyeld meg a zöld háromszöget!)



- 4** 📡 Mekkora a körök sugara?

- 5** 📡 Mekkora a kicsinyített alaprajz területe?



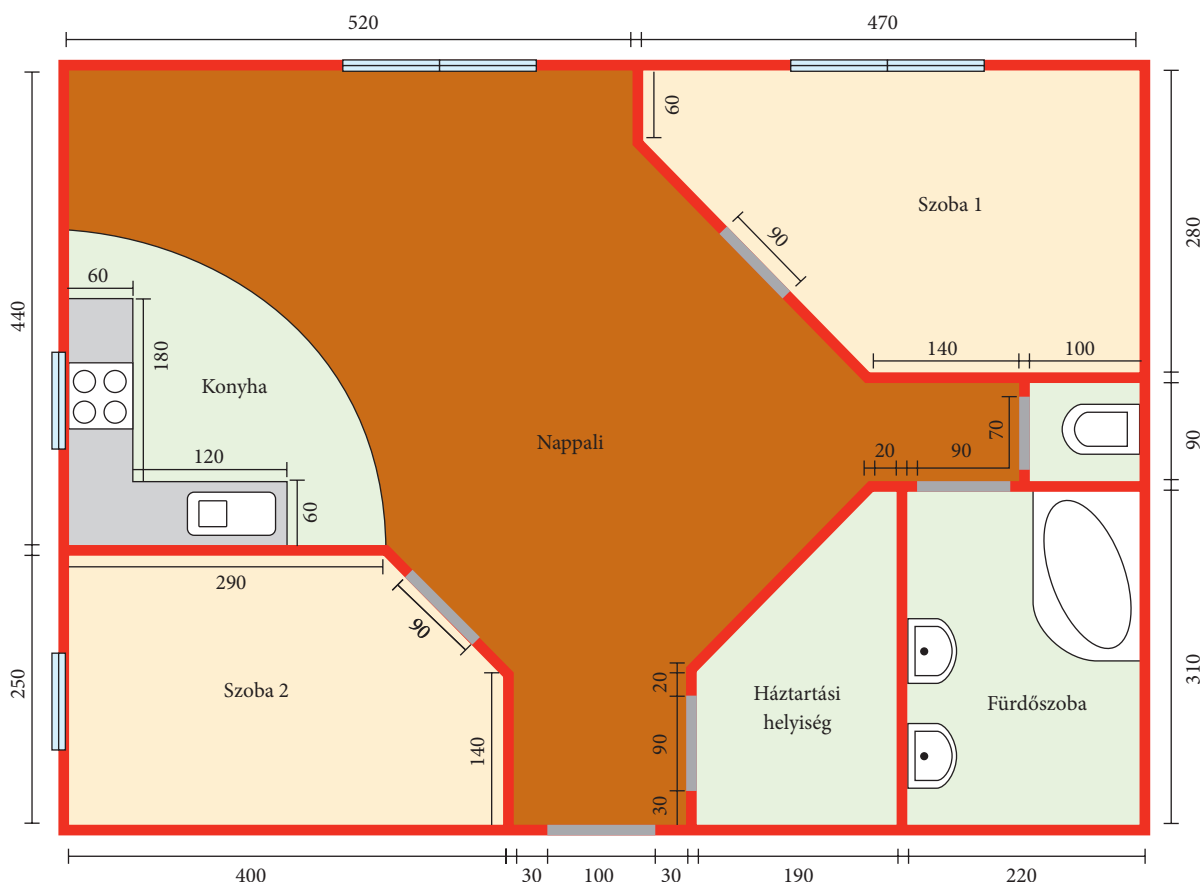


## PROJEKTMUNKA

Megadjuk egy lakás alaprajzát. A méreteket cm-ben adtuk meg, a belső falak vastagsága mindenhol 10 cm, a helyiségek magassága 265 cm. Az alaprajzon ferdén rajzolt falak mindenhol 45°-os szöget zárnak be az oldalfalakkal.

Egy család lakásfelújítást tervez. A helyiségek egy részét parkettázni kell, más részére járólapokat raknak, a falak mentén szegélyléceket kell lefektetni, a falakat és a plafont pedig ki kell festeni.

Dolgozzátok fel, hogy az alaprajzból kiindulva mely munkához mennyi alapanyagra lesz szükség, és mekkora költséggel jár mindez összesen. Az alábbi feladatokban szereplő információkat használhatod a munkádhoz, de ha szeretnéd, önállóan is utána nézhetsz az anyagköltségnek. A számítások során kerekíthetsz vagy becsülhetsz is, ezzel a számolás menetét is megkönnyítheted.



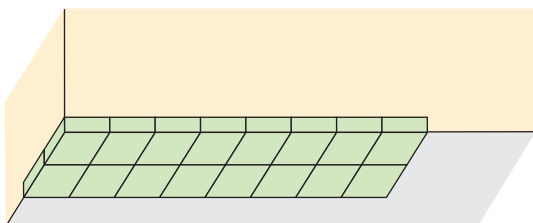
## Parkettázás

1. A két hálószobába egyforma, világos színű laminált parkettát szeretnének lerakni.
  - a) Mekkora a lefedendő terület?
  - b) Egy csomag parkettából 2,24 m<sup>2</sup>-t lehet lefedni. Hány csomagot vegyenek, ha 5% hulladékkal számolnak?
  - c) A világos parketta ára 2100 Ft/csomag. Mennyit fognak fizetni?

- 2.** A nappalit sötétebb színű parkettával szeretnék burkolni. Ez  $1,96 \text{ m}^2/\text{csomag}$  kiszerezésben kapható.
- Mennyit vegyenek, ha itt is 5% hulladékkal kell számolni? (A számoláshoz felhasználhatod, hogy egy  $r$  sugarú kör területe közelítőleg  $3,14 \cdot r^2$ .)
  - A sötétebb parketta csomagja 2600 Ft. Mennyibe fog kerülni ez a fajta parketta?
- 3.** A parketta és a falak találkozását szegélylécclé szokták letakarni.
- Hány m szegélylécet vegyenek a két szobához és a nappalihoz összesen? (Vigyázat! Az ajtóküszöbökénél és a járólapozott részekén nem kell szegélyléc!)
  - Mennyibe kerül ez 290 Ft/m áron számítva?

### Járólapok

- 4.** A háztartási helyiségbe és a konyhapult köré járólapot terveznek.
- Hány  $\text{m}^2$  járólapra lesz szükség?
  - A járólapok  $33 \times 33 \text{ cm}$ -esek és 9 db van belőlük egy csomagban, így minden csomag  $1 \text{ m}^2$  terület burkolására alkalmas. Egy csomag, tehát  $1 \text{ m}^2$  járólap ára 2900 Ft, de a csomagokat nem lehet megbontani. Hány csomagra lesz szükség, és mennyit kell majd fizetni értük?
  - Egy burkolómeister azt javasolta, hogy néhány lapot vágjanak szét 4 egyforma széles csíkra, és építsenek belőle „lábazatot”, azaz ragasszák fel körben a burkolt terület szegélye mentén a falra. Hány plusz lapra lesz ehhez szükség?



- 5.** Ugyanilyen módon (lábazattal) burkolják a fürdőszobát és a WC-t. Oda olyan járólapot választanak, melyből egy csomag járólap  $1 \text{ m}^2$  lefedésére elég, és az ára 3200 Ft. Hány csomag járólapra lesz szükség, és ez mennyibe kerül?

### Festés

- 6.** A két hálósobát szeretnénk egyforma színűre festeni. Az ajtók  $1,8 \text{ m}^2$ , az ablakok pedig egyenként  $1,3 \text{ m}^2$  felületűek. Mekkora falfelületet kell összesen befesteni?
- 7.** Az összes helyiségben fehér színűre festjük a mennyezetet. Mekkora ez a felület összesen?
- 8.** A két szobában a mennyezeten körbe gipsz díslécet szeretnék felrakni. Hány darab  $2 \text{ m}$  hosszú díslécet kell venniük?
- 9.** A mellékhelyiségeket is kifestik, de oda nem tesznek dísléceket. Hány  $\text{m}^2$ -es falfelülettel számoljanak?

A nappalival most nem foglalkozunk, azt szakemberrel fogjuk tapétáztatni.

- 10.** A festéket  $10 \text{ l}$  térfogatú vödörben hozzák forgalomba, egy vödörben  $9,5 \text{ l}$  festék van.  $1 \text{ m}^2$ -re kb.  $0,1$  liter festék kell. Hány vödör festéket kell venniük?
- 11.** Egy vödör festék ára 6830 Ft, egy szál ( $2 \text{ m}$ ) dísléc ára 1230 Ft. Mennyibe fog kerülni a festék és a dísléc?

## FELADAT

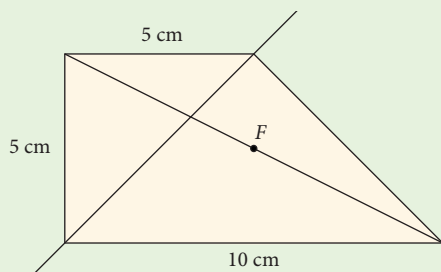
1. Mi jellemzi a nevezetes négyszögeket? Írd be a táblázat megfelelő celláiba azoknak a tulajdonságoknak a sorszámát, amelyek az adott típusú négyszögre biztosan igazak!

|                |  |
|----------------|--|
| trapéz         |  |
| húrtapéz       |  |
| paralelogramma |  |
| deltoid        |  |
| rombusz        |  |
| téglalap       |  |
| négyszet       |  |

1. átlói egyenlő hosszúak
2. átlói felezik egymást
3. átlói merőlegesek egymásra
4. van két egyenlő hosszú oldala
5. van két egyenlő nagyságú szöge
6. középpontosan szimmetrikus
7. tengelyesen szimmetrikus
8. konvex

2. Vegyél fel egy trapézt, melynek hosszabbik alapja 10 cm, rövidebbik alapja 5 cm, rövidebbik szára 5 cm, és az alapokon fekvő egyik szöge derékszög.

- a) Tükrözd a trapézt a hosszabbik átló felezőpontjára!
- b) Tükrözd a rövidebbik átló egyenesére!
- c) Határozd meg, hogy az a) és b) esetekben mekkora a tükrökép és az eredeti síkidom közös részének területe?



3. (érettségi feladat nyomán)

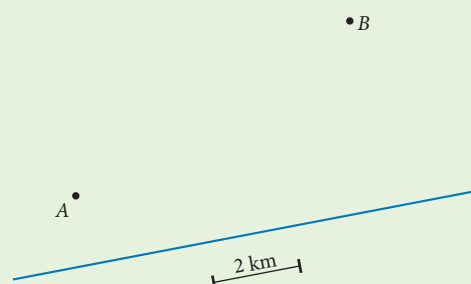
- a) Az alábbiak közül melyik transzformációk viszik önmagába az ábrán látható, sugárveszélyt jelző táblát?



- A 60°-os elforgatás a tábla középpontja körül
- B 120°-os elforgatás a tábla középpontja körül
- C középpontos tükrözés a tábla középpontjára
- D tengelyes tükrözés a tábla középpontján és a tábla egyik csúcsán átmenő tengelyre

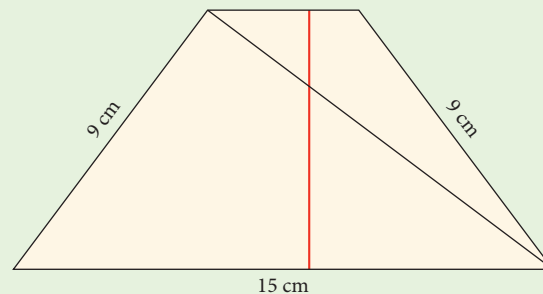
- b) Nézz utána, mit jelent az, hogy sugárveszély!

4. Az A településről a B településre szeretnénk eljutni úgy, hogy közben 2 km-t úszunk a folyóban. Melyik a legrövidebb út?



5. Egy húrtapéz egyik alapjának a hosszúsága 15 cm, a szárai 9 cm-esek, a körülírt körének átmérője is 15 cm.

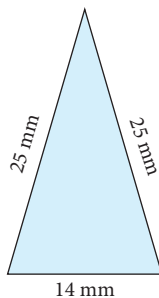
- a) Mekkora az átlói?
- b) Mekkora a magassága?
- c) Mekkora a másik alapja?



## TUDÁSPRÓBA

1. Egy háromszög oldalainak hossza 14 mm, 25 mm és 25 mm. Ezt a háromszöget tükrözzük mindhárom oldalfelező pontjára. A háromszög és a három tükörképe együtt egy sokszöget alkot.

- Hány oldalú ez a sokszög?
- Hány szimmetriatengelye van?
- Mekkora a területe?



2. Vegyél fel egy derékszögű trapézt, melynek magassága 4 cm, és két alapja 5 cm illetve 8 cm hosszú.

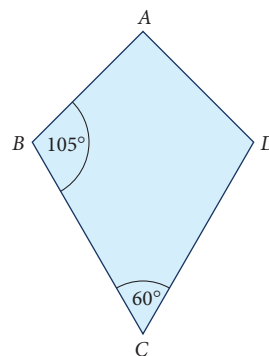
- Tükrözd a trapézt tengelyesen a hosszabb átló egyenesére! Milyen síkidom a tükörkép és az eredeti síkidom közös része? Mekkora a kerülete?
- Tükrözd a trapézt középpontosan a hosszabbik átló felezőpontjára! Milyen síkidom a tükörkép és az eredeti síkidom közös része? Mekkora a területe?

- c) Tükrözd a trapézt tengelyesen a rövidebbik átló egyenesére! Mekkora a tükörkép és az eredeti síkidom közös részének területe?

3. Egy rombusz egyik tompaszögű csúcsából meghúztuk a magasságot. Ez a magasság felezi a szemközti oldalt. Mekkora a rombusz szögei?

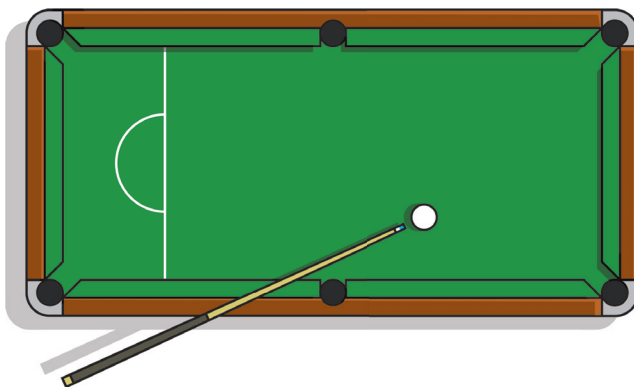
4. Egy deltoid két szöge  $105^\circ$ -os, egyik szöge  $60^\circ$ -os. Hosszabb oldalai 10 cm hosszúak.

- Milyen hosszúak az átlói?
- Mekkora a területe?
- Milyen hosszú a két rövidebb oldal?



## RÁADÁS

1. Egy biliárdasztalon az egyik átlóval párhuzamosan elindítok egy biliárdgolyót. Hová fog érkezni a biliárdgolyó, miután mind a négy oldalon visszaverődött? Válaszodat indokold! (Az asztal téglalap alakú, a visszaverődések tökéletesen rugalmasak, a golyó nem az asztal közepéről és nem a legszéléről indul úgy, hogy útja során nem esik bele egyik lyukba se.)



2. (Kompetenciamérés, 2011)

A közlekedésben néhány jármű (mentők, rendőrség, tűzoltók) elején speciális felirat látható. Ezt a feliratot a járművezetők a visszapillantó tükörből tudják elolvasni anélkül, hogy hátrafordulnának.

- a) Melyik felirat van elhelyezve egy tűzoltóautó elején?

A)

B)

C)

D)

TŰZOLTÓSÁG

ΛΓΣΟΓΛΩΣΥC

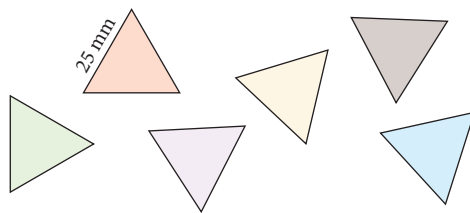
ΘΑΣΟΤΙΟΣΥΤ

ΘΥΣΟΛΤΙΟΖΛ

- b) Milyen feliratot készítsen a RENDŐRSÉG, ha azt szeretné, hogy ezt a szót olvassák a vezetők a visszapillantótükörben?

# TÉMAZÁRÓ FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 4,2 cm és 2,3 cm.
  - a) Tükrözd a háromszöget a hosszabbik befogó felezőpontjára!
  - b) Tükrözd a háromszöget az átfogóra!
  - c) Milyen síkidomot határoz meg együtt az eredeti és a tükrökép a két esetben?
2. Egy 3,5 cm oldalú szabályos háromszöget forgass el  $60^\circ$ -kal az egyik csúcsa körül. Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és kép együtt? Milyen hosszúak az átlói?
3. Vegyél fel a füzetedben két metsző egyenest,  $e$ -t és  $f$ -et, és az egyeneseken kívül egy  $P$  pontot! Forgasd el  $P$  körül az  $e$  egyenest úgy, hogy a képe
  - a)  $f$ -fel párhuzamos legyen;
  - b)  $f$ -re merőleges legyen!
4. Egy 4,4 cm oldalú négyzet egyik csúcsa  $A$ , középpontja  $O$ . Told el a négyzetet az  $\overrightarrow{OA}$  vektorral! Mekkora területű a két négyzet közös része?
5. Egy paralelogramma egyik szöge  $45^\circ$ -os, oldalai 8 cm és 3 cm hosszúak. Told el a paralelogrammát egy 3 cm hosszú, a paralelogramma egyik oldalával párhuzamos vektorral! Mekkora az eredeti és az eltolt paralelogramma által lefedett terület, ha
  - a) a vektor a rövidebb oldallal párhuzamos;
  - b) a vektor a hosszabb oldallal párhuzamos?
6. Vegyél fel a füzetedben két metsző egyenest és egy olyan szakaszt, amely egyik egyenessel sem párhuzamos! Told el a szakaszt úgy, hogy végpontjai az egyenesekre essenek! Hány megoldás van?
7. Vegyél fel a füzetedben egy 2,5 cm sugarú kört és egy 4 cm hosszú szakaszt! Szerkeszd meg a körben azt a 4 cm hosszú húrt, amely párhuzamos a szakasszal! Hány megoldás van?
8. Szerkessz egy négyzetet! Egyik oldalának felezőpontja legyen  $P$ . Tükrözd  $P$ -t a négyzet csúcsaira! Milyen négyszöget határoznak meg a kapott pontok?
9. Egy háromszög egyik szöge  $30^\circ$ -os, másik szöge  $80^\circ$ -os. A háromszög beírható körének középpontját tükrözzük a háromszög oldalegyeneseire. A kapott pontok a háromszög csúcsaival együtt egy hatszöget határoznak meg. Mekkora a hatszög szögei?
10. Az  $ABCDEF$  konvex hatszögről tudjuk, hogy az  $ABDE$  és a  $BCEF$  négyszögek paralelogrammák. Bizonyítsd be, hogy a  $CDFA$  négyszög is paralelogramma!
11. Egy háromszög súlypontját tükrözzük a háromszög oldalfelező pontjaira. A kapott pontok a háromszög csúcsaival együtt egy hatszöget határoznak meg. Bizonyítsd be, hogy a hatszög középpontosan szimmetrikus!
12. Egy deltoidban két szemközti szög nagysága  $52^\circ$  és  $116^\circ$ . Mekkora szöget zárnak be az átlók az oldalakkal?
13. Hat szabályos háromszög oldalai 25 mm-esek. Állíts össze belőlük egy olyan sokszöget, amely
  - a) középpontosan is és tengelyesen is szimmetrikus;
  - b) középpontosan szimmetrikus, de tengelyesen nem;
  - c) tengelyesen szimmetrikus, de középpontosan nem;
  - d) sem tengelyesen, sem középpontosan nem szimmetrikus!



14. (Érettségi feladat, 2008)  
Melyik állítás igaz, melyik állítás hamis?  
 A Ha az  $ABCD$  négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.  
 B Ha az  $ABCD$  négyszög átlói felezik egymást, akkor ez a négyszög téglalap.  
 C Ha az  $ABCD$  négyszög nem téglalap, akkor átlói nem felezik egymást.

- 15** (Érettségi feladat, 2008)  
Melyik állítás igaz, melyik állítás hamis?  
A Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van.  
B Minden rombusznak van két szimmetriatengelye.  
C Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.  
D Nincs olyan rombusz, amelynek négy szimmetriatengelye van.

- 16** Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza 12 cm és 16 cm. Mekkora a téglalap körülírt körének sugara?

- 17** (Érettségi feladat, 2010)  
Egy húrtrapéz egyik alapjának hossza 7 cm, ezen az alapon fekvő szögei  $60^\circ$ -osak. A szárai 4 cm-esek.  
a) Számítsa ki a másik alap hosszát!  
b) Számítsa ki a trapéz területét!

- 18** Egy rombusz egyik oldala 14 cm hosszú, egyik szöge  $120^\circ$ -os.  
a) Milyen hosszú a hosszabbik átlója?  
b) Mekkora a területe?

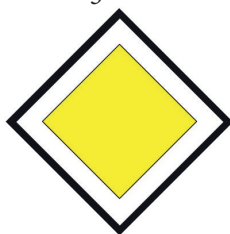
- 19** (Érettségi feladat)  
Egy négyzetet az egyik oldalával párhuzamos két egyenessel három egybevágó téglalapra bontunk. Egy ilyen téglalap kerülete 24 cm. Hány  $\text{cm}^2$  a négyzet területe?

- 20** Az  $ABCD$  konvex négyszöget átlóival négy háromszögre bontottuk. Milyen négyszöget határoznak meg a háromszögek köré írható köreinek középpontjai?

- 21** Hány százalékkal nagyobb a 3 cm oldalhosszúságú négyzet területe, mint annak a 3 cm oldalhosszúságú rombusznak a területe, melynek egyik szöge  $60^\circ$ -os?

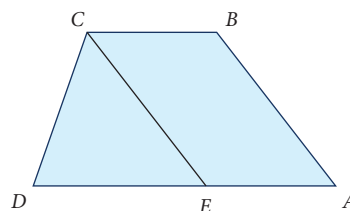
- 22** A főútvonalat jelző tábla  $60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$  nagyságú, élére állított négyzetet formáz. A függőlegesen behúzott átló mentén a külső fekete sáv az átló  $\frac{1}{20}$  részéig tart, a közbülső fehér sáv pedig az átló  $\frac{1}{5}$  részéig.

Számítsd ki a táblán található három tartomány (a külső fekete sáv, a közbülső fehér sáv és a középső sárga négyzet) területeinek arányát!



- 23** Egy húrtrapéz alapjai 16 cm és 12 cm hosszúak, magassága 8 cm hosszú.  
a) Mennyi a területe?  
b) Milyen hosszúak a szárai?  
c) Mennyi a kerülete?  
d) Milyen hosszúak az átlói?  
e) Két ilyen húrtrapézt egymás mellé illeszthetünk úgy, hogy egy paralelogrammát kapjunk. Készíts ábrát!  
f) Mennyi a paralelogramma területe és kerülete?

- 24** Az ábra szerinti trapézban  $CE$  párhuzamos  $DA$ -val. A  $BE$  szakasz 4 egység, a trapéz középvonala 5 egység hosszú. Milyen hosszúak a trapéz alapjai?

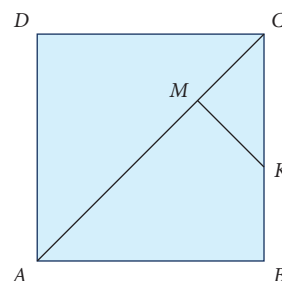


- 25** Az  $ABCD$  paralelogramma  $A$  csúcsához tartozó magassága felezi a  $CD$  oldalt.  $BC$  oldal hossza 4,7 cm. Milyen hosszú az  $AC$  átló?

- 26** Egy trapéz egyik szöge  $40^\circ$ -os. A  $40^\circ$ -os szögből húzott átlója a trapézt két egyenlő szárú háromszögre bontja. Mekkora lehet a trapéz többi szöge?

- 27** Egy húrtrapéz hosszabbik alapja és átlói is 6 cm hosszúak. Az átlók merőlegesek egymásra.  
a) Mekkora a trapéz szögei?  
b) Mekkora a trapéz kerülete és területe?

- 28** Az ábra szerinti  $ABCD$  négyzetben  $AM = AB$ , és az  $MK$  szakasz merőleges az  $AC$  átlóra. A négyzet oldala 12 cm.



- a) Milyen síkidom az  $ABKM$  négyszög?  
b) Tükrözd az  $M$  és  $K$  pontokat a  $BD$  átló egyenesére, legyenek az így kapott pontok  $M'$  és  $K'$ . Milyen síkidom az  $MM'K'K$  négyszög? Mekkora a területe?  
c) Mekkora az  $ABK$  háromszög területe?

## I. Rejtvények

1. 🎧 Néhány oszlopban az összes karikát színezd pirosra úgy, hogy minden sorban pontosan egy karika legyen piros!

|   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|
|   | ○ |   |   | ○ | ○ |   |
|   |   | ○ | ○ |   |   |   |
|   | ○ |   |   |   |   | ○ |
|   |   | ○ | ○ |   |   | ○ |
|   |   |   | ○ |   | ○ |   |
| ○ |   |   |   | ○ |   |   |
| ○ |   | ○ |   |   |   |   |

2. 🎧 Kösd össze az azonos betűket, de csakis a négyzetek középpontján át vízszintesen és függőlegesen haladó, egymást nem metsző vonalakkal!

|  |   |   |  |   |   |   |   |
|--|---|---|--|---|---|---|---|
|  |   |   |  |   | A |   |   |
|  |   |   |  |   |   | B |   |
|  |   | C |  |   |   |   |   |
|  |   |   |  |   |   |   | D |
|  | A | D |  |   |   | C |   |
|  |   |   |  | B |   |   |   |

## 3. 🎧 Számkeresztrejtvény

**Vízszintes:** **a)** Egy prímszám négyzete. **e)** A függőleges **j)** és a függőleges **k)** legnagyobb közös osztójának a fele. **f)** Egy négyzetszám köbe. **h)** A vízszintes **a)** négyzetgyöke. **j)** Szimmetrikus négyzetszám (jegyei fordított sorrendben is ugyanazt a számot alkotják). **m)** A függőleges **i)**-nél 1-gyel nagyobb szám. **n)** A vízszintes **h)** ötszöröse. **o)** A vízszintes **m)**-nél 1-gyel nagyobb szám négyzete.

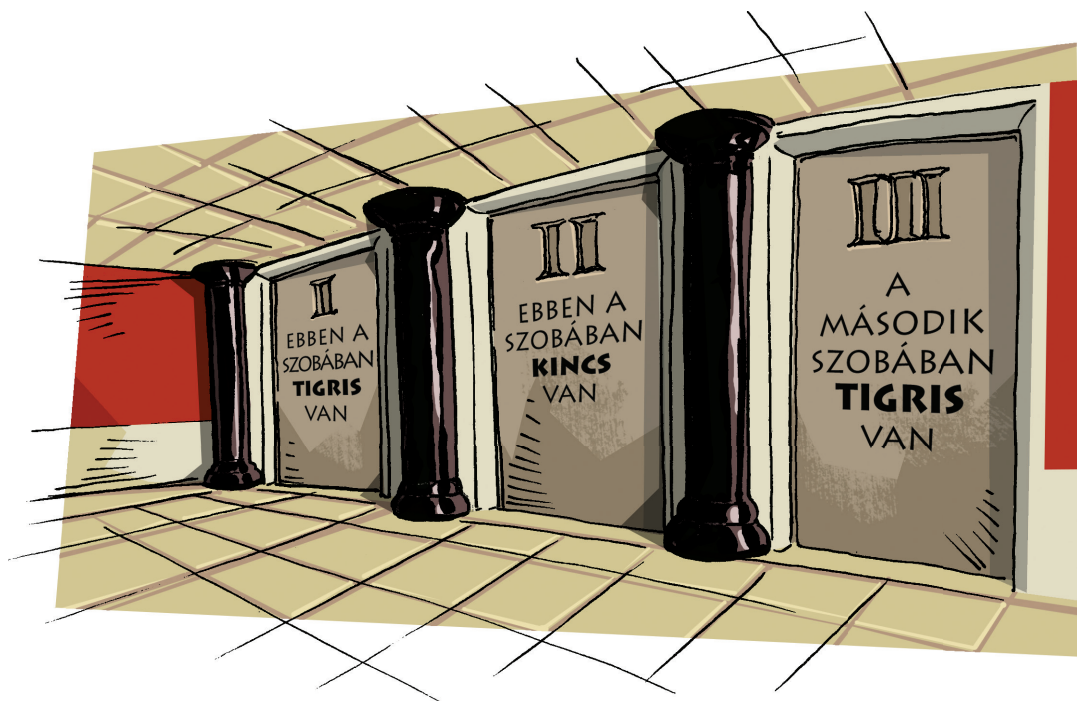
**Függőleges:** **a)** 8-cal kisebb a legkisebb olyan természetes számnál, amely 2-vel osztva 1-et, 3-mal osztva 2-t, 4-gyel osztva 3-at, 5-tel osztva 4-et, 6-tal osztva 5-öt ad maradékul. **b)** Számjegyeinek összege 29. **c)** Prímszám. **d)** A függőleges **k)** egyik prímtenyezője. **g)** A vízszintes **m)** és a vízszintes **o)** szorzatának négytizede. **i)** A függőleges **d)** kétszerese. **j)** A függőleges **k)** fordítottja. **k)** A vízszintes **j)** négyzetgyöke. **l)** A vízszintes **m)** legnagyobb prímtenyezőjének többszöröse.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| a | b |   | c |   | d |
| e |   |   | f | g |   |
|   | h | i |   |   |   |
| j |   |   | k |   | l |
| m |   |   | n |   |   |
|   |   | o |   |   |   |



## II. Fejtörők

1. 🎧 Gondolj egy számra, adj hozzá 2-t, szorozd meg 6-tal, adj hozzá 9-et, oszd el 3-mal, vedd el belőle 7-et, oszd el 2-vel! Így megkapod azt a számot, amelyre gondoltál. Miért?
2. 🎧 Gondolj egy számra, adj hozzá 5-öt, szorozd meg 2-vel, vedd el belőle 20-at, adj hozzá 9-et, szorozd meg 3-mal, vond ki a gondolt szám 6-szorosából! Így 3-at kapsz. Miért?
3. 🎧 Három szoba közül az egyikben kincs van, a másik kettőben pedig egy-egy tigris. A szobák ajtaján szereplő három felirat közül legfeljebb egy igaz. Melyik szobában van a kincs, ha a feliratok a következők:



4. 🎧 Határozd meg azt a legnagyobb számot, amelyben a harmadik számjegytől kezdve minden számjegy az előző két számjegy összege!
5. 🎧 A 4 cm oldalú négyzetnek  $16 \text{ cm}^2$  a területe és 16 cm a kerülete. Van-e még egy olyan téglalap, amelynek annyi négyzetcentiméter a területe, ahány centiméter a kerülete? A téglalap oldalainak hossza csak egész centiméter lehet.
6. 🎧 Egy szabályos sakktábla bal alsó sarkából elindul egy bábu. Balázs és apa lépteti vagy vízszintesen jobbra valahány mezőt, vagy függőlegesen felfelé valahány mezőt. Az nyer, aki a jobb felső sarokba lép. Először Balázs lépett, és akkor apa azt mondta, hogy Balázs máris veszett. Honnan tudta apa, hogy ha ő jól játszik, akkor Balázs nem nyerhet?
7. 🎧 Csongor előkészített 56 gyufaszálat. Balázssal ezekből felváltva vesznek ki 1, 2 vagy 3 darabot. Az nyer, aki az utolsót veszi el. Balázs azt állította, hogy ő biztosan nyer, ha Csongor kezdi a játékot. Ezt Csongor csak azután hitte el, hogy Balázstól 5-ször kikapott. Mi lehet Balázs trükkje?
8. 🎧 Csongor egy gyufát kidobott, maradt 55 darab. Kíváncsi volt, így is megveri-e az öccse. Balázs váltig állította, hogy igen, de akkor neki kell kezdenie a játékot. Csongor beleegyezett. Balázs az első húzásnál 3 gyufát vett el. Ezután pedig mindig újra Balázs győzött. Miért?

# A FELADATOK VÉGEREDMÉNYEI

**39. lecke:** 1. a) X. b) A; K; X. c) H; N; Z. d) M. e) A; E; H; T; X. f) nincs. 2. a)  $e \parallel f; i \perp f; i \perp g$ . b)  $\beta = 130^\circ; \gamma = 50^\circ; \delta = 130^\circ$ . 3. a) szögmásolással. 4. nagymutató:  $240^\circ$ ; kis-mutató:  $20^\circ$ . 5.  $20^\circ$ . 6. a)  $130^\circ; 65^\circ; 50^\circ; 25^\circ$ . b) Egyállásúak például  $\beta$  és  $\varepsilon$ . Váltószögek  $\alpha$  és  $\lambda$ . Kiegészítőszögek  $\lambda$  és  $\varphi$ .

**40. lecke:** 1.  $180^\circ; 60^\circ; 135^\circ; 105^\circ; 120^\circ; 360^\circ$ . 2. igaz; hamis; igaz; igaz; hamis; hamis; igaz; igaz. 3. a)  $22,5^\circ; 45^\circ; 67,5^\circ$ . 4.  $150^\circ$ . 5. a)  $ECD; ADE; BEA; CAB; DBC$ . b)  $EAT; EAC; ABP; ABD; BCQ; BCE; CDR; CDA; DES; DEB$ . c)  $AD = BD$  (2 kék + 1 zöld szakasz),  $AD$ -vel és  $BD$ -vel szemközti szögek egyenlők. d) a) és b) részben:  $36^\circ; 36^\circ; 108^\circ$ ; c) részben:  $36^\circ; 72^\circ; 72^\circ$ . 6.  $40^\circ$  és  $50^\circ$ .  $20^\circ$  és  $70^\circ$ .

**41. lecke:** 1. a) 37,5. b) 12,5. c) 6. d) 4,5 és 8. e) igaz. 2. a) nem. b) igen. 3. 112 m; 6696 m<sup>2</sup>. 4. oldalak: 28 cm; 45 cm; 53 cm.

**42. lecke:** 1. 13,5 cm. 2. a) 11,8 dm. b) 10,4 m. c) 11,4 m; 9,87 m. 3. a) szabályos háromszög; oldala kétszerese az eredetinek. b) 6,9 cm. 4. két lehetőség van;  $CD = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  vagy  $CD = 4(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ .

**43. lecke:** 1. b) c) a cm-ben lemért távolság 0,2-szerese adja meg km-ben a távolságot. d) pl. cérna segítségével. 2. 2,60 cm; 5,2 cm. 3. 4,24 m; 5,66 m. 4. a)  $BC; CG; DC; AB; AD; DH; BF; FG; GH; AE; EF; EH$ . b)  $AB; AD; AE; BC; BF; EF; DC; EH; DH; FG; CG; GH$ . c)  $AB; BC; EF; BF; FG; GH; DC; CG; EH; DH; AD; AE$ . 5. (7; 7).

**44. lecke:** 1. a) 3,3 cm. b) 9,8 cm; 3,2 cm. 2. a) 9,66 cm. 3. 48 cm. 4. 5 cm sugarú koncentrikus kör.

**45. lecke:** 1. a) 2,31 cm; 1,15 cm. b) fele. 2. nincs. 3. 3,19 cm.

**46. lecke:** 1. a) igen. b) igen. c) igen. d) nem. 2. a) 4,2 cm. b) 1,4 cm; 2,8 cm. c) 4,85 cm. 3. a) 32,5 cm; 28 cm; 16,5 cm. b) 43,28 cm; 58,38 cm. 4. a) 9 mm. b)  $9\sqrt{2}$  mm. c) 18 mm. d) 93 mm. e)  $9\sqrt{2}$  mm. 5. középvonalak: 21 cm; 14,5 cm; 14,5 cm; súlyvonalak: 20 cm; 33 cm; 33 cm.

**47. lecke:** 1. a) igaz. b) hamis. c) igaz. d) hamis. e) igaz. f) igaz. g) igaz. h) igaz. 2. a) mindkét egyenestől ( $e$  és  $f$ ) kisebb, mint 3,5 cm távolságra lévő pontok. b)  $K$  ponttól nagyobb, mint 3 és (ugyanakkor)  $P$  ponttól legfeljebb 2 egység távolságra lévő pontok. c)  $B$  ponttól való távolsága legalább 2 km és ugyanakkor  $B$ -hez közelebb lévő pontok, mint  $A$ -hoz. d)  $K$  ponttól 6 egység távolságra lévő pontok, melyek az  $e$  egyenestől legfeljebb 1 egység távolságra vannak. e)  $K$  ponttól 6 egység távolságra lévő pontok, melyek legalább olyan távolságban vannak  $f$  egyenestől, mint  $e$  egyenestől. 3. 1375 méter. 4. két eset van: 13 cm vagy 27 cm. 5. a Pitagorasz tétel segítségével: pl. 1 egység befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója ( $\sqrt{2}$  egység), illetve a 2 egység oldalhosszúságú szabályos háromszög magassága ( $\sqrt{3}$  egység).

**49. lecke:** 1. 2,95 cm. 3. a) a Thálesz tétel és az egyenlőszárú derékszögű háromszög tulajdonságainak felhasználásával. b) a távolságok:  $25\sqrt{2}$ ;  $25\sqrt{2}$ ;  $25\sqrt{10}$ . 4. a) hegyesszögű, mert  $6^2 + 8^2 < 9^2$ . b) 4,5 cm (a Thálesz tétel megfordítása miatt). 5. a) lásd előző feladat. b) része. b) igaz.

**50. lecke:** 1. 72 dm<sup>2</sup>; 16 dm<sup>2</sup>; 62,4 m<sup>2</sup>. 2. a) 8 cm és 6 cm. b) 24 cm<sup>2</sup>. c) 2,4 cm. 3. 33,33%. 4. a) 13,9 m és 10,4 m. b) 83,1 m<sup>2</sup>. c) 52,3 m. 5.  $\approx 102$  m<sup>2</sup>.

**51. lecke:** 1. 6,93 m; 14,73 m. 2. a)  $25^\circ; 65^\circ$ . b) 8 cm. 3. a)  $16,37^\circ; 73,63^\circ$ . b)  $69^\circ; 111^\circ$ . c)  $85^\circ$ . d) nincs ilyen. 4. 21,25 cm<sup>2</sup>. 5. a) 13 km. b) 21,2 km. c) 5,5 km. d)  $15^\circ$ . 6. Segít a pontok megtalálásában, ha berajzoljuk a  $BC$  oldal felezőmerőlegesét, és az  $A$  középpontú 1 cm sugarú kört. 7. 180 cm<sup>2</sup>. 8. a) 14,5 m.

**52. lecke:** 1. Növekvő pontszámhoz tartozó gyakoriságok: 1; 4; 3; 3; 2; 5; 5; 3; 3; 1; relatív gyakoriságok:  $\frac{1}{30}; \frac{2}{15}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{15}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{10}; \frac{1}{10}; \frac{1}{30}$ . 2. a) gyakoriságok: 4; 1; 2; 3; 4; 4; 3; 1; 1; 1; 1. b) gyakoriságok: 4; 5; 7; 10; 14; 18; 21; 22; 23; 24; 25. Relatív gyakoriságok: 0,16; 0,25; 0,28; 0,40;

0,56; 0,72; 0,84; 0,88; 0,92; 0,96; 1,00. **3. a)**  $\approx 0,14$ ;  $\approx 0,13$ ;  $\approx 0,15$ . **b)**  $\approx 0,16$ ;  $\approx 0,1$ . **c)**  $\approx 57$ ;  $\approx 0,13$ .

**53. lecke: 1.** relatív gyakoriságok: 0,00; 0,00; 0,00; 0,25; 0,40; 0,33; 0,43; 0,50; 0,56; 0,60; 0,64; 0,67; 0,62; 0,64; 0,67; 0,62.

**2.**  $\frac{150}{270} \approx 0,5556$  és  $\frac{120}{270} \approx 0,4444$ . **4.**  $\frac{90}{270} \approx 0,3333$ ;

$\frac{135}{270} = 0,5$  és  $\frac{45}{270} \approx 0,1667$ .

**54. lecke: 1. a)** 0. perc Kövespuszta; 11. perc város széle (piros lámpa); 15. perc Alsóváros, 15–16. perc várakozás; 20,5 perc piros lámpa (állítólagos baleset); 24. perc leszállás. **b)** Alsóvárosnál megállt; 15–16. perc között várakozott, hasonló tempóban lassított, mint az előző piros lámpánál. **c)** várakozott a busz egy percen keresztül.

**d)** 2–3. perc között átlépte a  $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  megengedett sebességet. **2. a)** Januártól júliusig növekedett, júliustól decemberig csökkent. A növekedés mértéke összességében kisebb, mint a csökkenésé. Januárhoz képest decemberben olcsóbb lett. **b)** A) a) –60; b) –93. B) a) május–június: 11; b) április–május: 3. c) átlagos:  $\frac{28}{6} \approx 4,67$ . C) a) október–november: –40; b) augusztus–szeptember: –2; c) átlagos: –12. D) pontosan nem állapítható meg.

Május 17.  $\approx 305 \frac{\text{Ft}}{\text{liter}}$ ; november 20.  $\approx 240 \frac{\text{Ft}}{\text{liter}}$ .

**3. a)** B. **b)** C. **c)** C. **d)** B.

**Raadás lecke: 2. a)** 248; 216; 315,6; 277,6 (ezer Ft).

**d)** 1,5 millió Ft vagy ennél több. **3. a)** igaz. **b)** igaz. **c)** hamis. **d)** igaz. **e)** igaz.

**55. lecke: 1. a)** 130; 260; 520; 650; 780; 910; 1040; 1170; 1300.

**b)**  $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\}$ ;  
 $R = \{130x \mid x \in \mathbb{Z}; 1 \leq x \leq 10\}$  **2. a)**  $D_a = [-3; 4]$ ,  
 $D_b = \{-2; -1; 1; 2\}$ ,  $D_c = [-2; 5]$ . **b)**  $R_a = [-3; 4]$ ;  
 $R_b = \{0; 1\}$ ;  $R_c = \{4\}$ . **c)** c. **d)** b és c. **3. a)** 20; 30; 50; 70; 80; 100(s). **b)**  $D = \{100; 150; 250; 350; 400; 500\}$ ;  
 $R = \{20; 30; 50; 70; 80; 100\}$ .

**56. lecke: 1. a)** lineáris függvény. **b)** kb. 0,1 litert. **c)** időtartam = 0,1 · mennyiség. **d)** 15 perc. **e)** 1,5 liter.

**2. b)** Ha a pontokra egyenest illesztünk, akkor 300 forintnál. Ez jelenti az alapidíjat. **c)** Zérushelye nincs, negatív valóság esetén nem értelmezhető a feladat a szövege miatt.

**57. lecke: 1. a)** 0,5 cm. **b)**  $\frac{1}{3}$  cm-rel. **c)** teljesíti az  $y = 3x$  kapcsolatot, azaz  $1,5 = 3 \cdot 0,5$ . **d)** teljesíti az  $y = 4x$  kapcsolatot, azaz  $2 = 4 \cdot 0,5$ .

latot, azaz  $2 = 4 \cdot 0,5$ . **2.** Mindegyik a nemnegatív számok halmaza.

**58. lecke: 1. b)**  $f_1(x) = 0,5 \cdot x$ ;  $f_2(x) = 1 \cdot x$ ;  $f_3(x) = 1,5 \cdot x$ .

**c)** 0,5; 1; 1,5. **2. a)**  $m_a = -0,25$ ;  $m_b = -1$ ;  $m_c = -2$ .

**b)**  $f_a(x) = -0,25x$ ;  $f_b(x) = -1x$ ;  $f_c(x) = -2x$ .

**c)**  $f_a(x) = -0,25x + 3$ ;  $f_b(x) = -1x + 3$ ;  $f_c(x) = -2x + 3$ .

**3. a)**  $f$  párhuzamos  $c$ -vel; a párhuzamos  $e$ -vel. **b)**  $d$ ,  $c$  és  $f$  egyenesek. **c)**  $c$  és  $f$  egyenes. **4. a)**  $\frac{3}{2}$ . **b)** igen.

**59. lecke: 1. a)**  $0 \leq x < 5$  esetén Kisgázzal,  $x = 5$  esetén mindegy,  $5 < x$  esetén „7 × 7”-tel. **b)**  $\frac{1}{4}$  tallér illetve  $\frac{1}{2}$

tallér. **c)**  $\frac{1}{2}$ , illetve  $\frac{1}{4}$ . **d)**  $y_{\text{Kisgáz}} = \frac{1}{2}x + 1$ ;  $y_{7 \times 7} = \frac{1}{4}x + 2$ .

**e)** 2,8 4,8 6,8 km után a Kisgáznál 2,4; 3,4 és 4,4 tallért; a „7 × 7”-nél 2,7; 3,2 és 3,7 tallért. **f)** 6 km, illetve 8 km.

**3.**  $f_{\text{kék}} = -\frac{2}{3}x - 3$ ;  $f_{\text{zöld}} = -\frac{3}{2}x - 3$ ;  $f_{\text{piros}} = -2x - 3$

**4.**  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ . **5. a)**  $\approx 232,7^\circ\text{C}$ . **b)** rendre 18 F; 9 F; 1,8 F.

**60. lecke: 2. a)** –4,5 és 4,5. **b)** –1,5. **3.** minimumhelyek:  $-\frac{8}{3}$ ;

2 és 1. **4. a)** (–6; 4) és (–3; 2). **b)** az a hely (első koordináta), ahol megegyezik a két függvény értéke (második koordináta).

**5. a)**  $f_a(x) = \left| \frac{4}{3} \cdot x + 3 \right|$  vagy  $f_a(x) = \left| -\frac{4}{3} \cdot x - 3 \right|$ .

**b)**  $f_b(x) = \left| -\frac{3}{2} \cdot x + 2 \right|$  vagy  $f_b(x) = \left| \frac{3}{2} \cdot x - 2 \right|$ ;

**c)**  $f_c(x) = \left| -3 \cdot x + 1 \right|$  vagy  $f_c(x) = \left| 3 \cdot x - 1 \right|$ .

**61. lecke: 2. a)** és **c)** lehet. **3. a)** biztos. **b)** lehetetlen.

**c)** lehetséges. **4. a)**  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = |x|$ .

**b)**  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ,  $f(x) = |x|$ . **6. a)** igaz. **b)** nem igaz.

**62. lecke: 1.**  $f$ : legkisebb értéke –1; legnagyobb értéke 1.

$g$ : legkisebb értéke –1; legnagyobb értéke 8.  $h$ : legkisebb

értéke nincs; legnagyobb értéke nincs. **2. a)** legkisebb nincs, legnagyobb 3; 4, illetve 2,5. **b)** legnagyobb 3; nincs, illetve 2,5. Legkisebb 0; 0, illetve nincs. **3. a)** legnagyobb 3; nincs, illetve 3. Legkisebb –1; –1; –1.

**b)** legnagyobb 1; 1; 1. Legkisebb –3; nincs, illetve –3.

**c)** legnagyobb 3; nincs, illetve 3. Legkisebb 0; 0; 0.

**63. lecke: 1. a)** A; C. **b)** 1024; 64;  $\frac{9}{25}$ . **c)** –15 és 15; –1,3 és

1,3;  $-\frac{6}{7}$  és  $\frac{6}{7}$ . **2. a)** 14. **b)** 29. **c)** 90. **3. a)** rajta van: B; D; G.

**b)** rendre: 0; 7,84; 26,01; 144. **c)** rendre: 0;

$\sqrt{2,8} \approx 1,67$ ;  $\sqrt{5,1} \approx 2,26$ ;  $\sqrt{12} \approx 3,46$ .

**4.**  $4 = \sqrt{16} < \sqrt{19} < \sqrt{25} = 5$ ;

$7 = \sqrt{49} < \sqrt{57} < \sqrt{64} = 8$ ;

$9 = \sqrt{81} < \sqrt{93} < \sqrt{100} = 10$  a négyzetgyökfüggvény szigorú monoton növekvő tulajdonságát használtuk.

5. a) 5. b) 8. c) 19.

64. lecke: 1. a) 38 tallér. b) 8 tallér. c) 18 kilométer. e) 16 kilométernél kisebb távon. 2. a)  $y = -x + 7$ ,  $0 \leq x \leq 7$ .

b)  $T(x) = x(7 - x)$ . c) (3; 4), illetve (4; 3) koordinátájú pontok esetén a terület 12 területegység.

3. a)  $\approx 26\,667$  forint. b)  $D = [0; 11]$ ;  $R = [50; 130]$ ;

c) Nem, csak szakaszonként lineáris. 4. a) B.

b) 40 g 0,69 zed, 80 g 1,02 zed, együtt 1,71 zed; 120 g 1,75 zed, tehát külön jobban megéri.

65. lecke: 1. a)  $x = 4$ . b)  $x = -1$ . c)  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ .

d)  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 4$ . 2. a)  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 1$ . b)  $x = \frac{20}{3}$ .

3. 3 perc múlva.

66. lecke: 1. a)  $-1 < x$ . b) minden valós szám. c)  $x \leq 0,75$ .

2. a)  $x \leq 2,5$ . b)  $x \leq 1$ . c)  $x < 1$ . d)  $x \leq 3$ .  $2 < x \leq 5$ ; valós számok esetén végtelen sok, természetes számok esetén három. 4. legalább 11 050 Ft, legfeljebb 132 250 Ft.

Ráadás lecke: 1. a)  $k$  = határidőnaplók száma;

$s$  = nyakláncok száma. b)  $3,5k + 2,8(42 - k)$  Ft.

c)  $k \leq 17,71$ . d) 4-féle. 2. 30 lehetőség van, a létszám lehet 121; 122; 123; ...; 149; 150. 3. a)  $-2 < x < 4$ . b)  $x \leq -2$  vagy  $x > 4$ . c)  $x < -2$  vagy  $x \geq 4$ . 4. a)  $x \leq 0,75$  vagy  $2,5 \leq x$ .

b)  $-\frac{12}{5} < x < \frac{3}{7}$ . 5.  $-3 < x < -2$  vagy  $-1 < x < 0$ .

67. lecke: 1. a) 1 és -5. b) 0,3 és -4,3. c) -2. d) nincs

megoldás. 2. a)  $|3x - 7| = 4$  vagy  $|-3x + 7| = 4$ .

b)  $|2x + 4| = 2$ . c)  $-|x| = -3$ . 3. a) 4,5 és 1,5. b) 2 és 6.

c) 0 és 4. d) 3. 4. a) 2 és 0. b) 5 és -5. 5. a)  $0 \leq x$ .

b)  $x \leq 0$ . c)  $x = 0$ .

68. lecke: 2. c. 3.  $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ . 6. a) 1. b) 0; 1; 2; 3; 4; 5.

c) 3; -1; d) nincs megoldása.

69. lecke: 1. C. 6. Háromszöget (mely hasonló az eredetihez). 7. Az adatoktól függően legfeljebb 6 megoldás lehet.

70. lecke: 1. Egyenlőek d és e, u és v; ellentettek a és w, b és c; egyenlő hosszúak de nem egyállásúak például a és v.

3. a) igaz. b) egy. 4. b)  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AC}$  vagy  $\overrightarrow{AD}$  vektorok valamelyikével. 5. A és D, B és F. 6. a) végtelen. b) Amikor az

eltolás vektora merőleges az egyenesre, hossza megegyezik a B pont és az egyenes távolságával. c) végtelen.

71. lecke: 1. Egyenlőszárú háromszöget; deltoidot. 2. AB a kör átmérője. Ekkor  $P'P$  egy AB-re merőleges húr. 3. Eltolással. 4. b)  $60^\circ$ -os forgatással.

72. lecke: 1. c) területe  $6\text{ cm}^2$ , kerülete  $\approx 15,85\text{ cm}$ .

2. a) Tengelyes tükrözés van, tengelye BC felezőmerőleges. Középpontos tükrözés van, középpontja a BC szakasz felezőpontja. Forgalás van, középpontja a BC szakasz felezőpontja. Eltolás van, vektora az  $\overrightarrow{AC}$  vagy a  $\overrightarrow{CA}$  vektor.

b) Tengelyes tükrözés nincs. Középpontos tükrözés van, középpontja a BC szakasz felezőpontja. Forgalás van, középpontja a BC szakasz felezőpontja. Eltolás van, vektora az  $\overrightarrow{AC}$  vagy a  $\overrightarrow{CA}$  vektor. c) Tengelyes tükrözés nincs. Középpontos tükrözés nincs. Forgalás van, két lényegesen különböző módon: egyik középpont a BC szakasz felezőmerőlegesének és az AD szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja, másik középpont az AC szakasz felezőmerőlegesének és a BD szakasz felezőmerőlegesének metszéspontja. Eltolás nincs. 3. b) A forgatás középpontja a B pont, a forgatás szöge  $90^\circ$ . 6. Visszajutunk a kiindulási körhöz a), b) és c) esetben, a) és b) esetben pontonként is.

Ráadás lecke: 1. I. eset. a) 5,39 km. b) B-től 2,24 km, A-tól 4 km. c) 5,39 km. II. eset a) 2,83 km. b) B-től 2,24 km, A-tól 3 km. c) 4,47 km. 2. a) A-ból merőlegest bocsájtunk a folyóra. b) AB egyenesén. c) A-t toljuk el a folyó szélességével, a folyóra merőlegesen B felé. A'B kimetszi a folyó szélét jelentő egyenesből a híd helyét. 3. Három megoldás van. 5. a) 0,732 m. b) 2,73 m. 6. a) 7:30-kor. b) Nagymutató két perccel a 12-es után, kismutató majdnem a 8-asnál.

73. lecke: 1. Hamis: B, E és F. 2. b) Téglalap.  $2772\text{ mm}^2$ .

c) Deltoid.  $2772\text{ mm}^2$ . 3. Végtelen. Lehet sokféle konvex vagy konkáv deltoid is. 4. Szimmetrikus trapéz. a) Igen.

b) 3 cm; 4 cm. c) 7 cm; 1 cm. d) 7,07 cm; 1,41 cm.

5. a) 4,50 cm. b) 2,6 cm; 5,2 cm; 2,6 cm. c)  $11,71\text{ cm}^2$ .

d) 2,25 cm; 4,50 cm.

74. lecke: 1. a)  $35\text{ cm}^2$ . b)  $20\text{ cm}^2$ . c)  $12\text{ cm}^2$ . 2.  $227,2\text{ cm}^2$ ;  $42,3\text{ m}^2$ ;  $750\text{ dm}^2$ . 3. a) lehet, 4 cm. b) nem lehet.

c) lehet, 0,0083 cm. d) lehet, 12 cm. 4. a) nem változott.

b)  $18,5\text{ m}^2$ -tel. c)  $13\text{ m}^2$ -tel.

**75. lecke: 1. a)** 6; 9. **b)** Szimmetriatengelye van. **c)**  $720^\circ$ .  
**d)** 10 cm; 5 cm; 8,66 cm;  $120^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $90^\circ$ ; 19,3 cm.  
**e)** 47,3 cm;  $143,3 \text{ cm}^2$ . **2. a)** 11,3 cm és 17,4 cm. **b)**  $98,3 \text{ cm}^2$ .  
**c)** 50%. **3. a)**  $30^\circ$ ;  $90^\circ$ ; 13,86 cm. **b)** a baloldali:  $60^\circ$ ,  $60^\circ$  és  $60^\circ$ ; minden oldala 8 cm; a jobboldali:  $30^\circ$ ,  $30^\circ$  és  $120^\circ$ ,  
 oldalai 8 cm, 8 cm és 13,86 cm; a középső:  $60^\circ$ ,  $30^\circ$  és  $90^\circ$ ;  
 oldalai 8 cm, 16 cm és 13,86 cm. **c)**  $110,9 \text{ cm}^2$ . **4. b)**  $112,5^\circ$ ;  
 $112,5^\circ$ ;  $67,5^\circ$ ;  $67,5^\circ$ . Kerülete 17,7 cm; területe  $18 \text{ cm}^2$ .  
 5.  $9,12 \text{ cm}^2$ ; 13,12 cm.

**Ráadás lecke: 1.**  $5,9 \text{ m}^2$ . **2. a)**  $90^\circ$ -kal. **b)** Egymásnak megfelelő csúcsokat összekötő szakaszok felezőmerőlegeseinek metszéspontjába.

**Ráadás lecke: 1. a)**  $20,135 \text{ m}^2$ . **b)** 10. **c)** 21 000 Ft.

**2. a)** 16. **b)** 41 600 Ft. **3. a)**  $\approx 42 \text{ m}$ . **b)** 12 180 Ft.

**4. a)** kb.  $9 \text{ m}^2$ . **b)** 9 csomag; 26 100 Ft. **c)** 8. **5.** 10 csomag; 32 000 Ft. **6.** kb.  $61,5 \text{ m}^2$ . **7.**  $70 \text{ m}^2$ . **8.** 14 darab.

**9.** kb.  $56,6 \text{ m}^2$ . **10.** 3 doboz. **11.** 37 710 Ft.

**76. lecke: 1.** trapéz: 8; húrtrapéz: 1, 4, 5, 7, 8;  
 paralelogramma: 2, 4, 5, 6, 8; deltoid: 3, 4, 5, 7;  
 rombusz: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; téglalap: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8;  
 négyzet: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. **2. c)** mindkét esetben  $25 \text{ cm}^2$ .  
**3.** B és D. **4.** A-t toljuk el 2 km-rel a folyó mentén, s ekkor  
 keressük meg a folyót érintő legrövidebb utat.  
**5. a)** 12 cm. **b)** 7,2 cm. **c)** 4,2 cm.

# SZÁMÍTÓGÉPES PROGRAMOK HASZNÁLATA

## A programok telepítése előtt győződjünk meg a használati jogosultságról!

1. Ábrázoljuk a *GeoGebra* program segítségével (ingyenes matematikai program, letölthető a [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) oldalról) a valós számok halmazán értelmezett  $x \mapsto ax + b$  lineáris függvényt! Vizsgáljuk, hogyan változnak a függvény tulajdonságai az  $a$ , illetve a  $b$  értékének változtatásával!

### Segítség

- Hozzunk létre egy-egy csúszkát  $a$ , illetve  $b$  névvel, állítsuk a lehetséges értékeiket a vizsgálni kívánt eseteknek megfelelően.
- Defináljuk az  $f$  függvényt az  $f(x) = ax + b$  képlettel (vagy az  $y = ax + b$  képlettel egy egyenest, amelyik az  $f$  függvény grafikonja). Ekkor a program a csúszkán beállított aktuális értékeknek megfelelően megrajzol egy egyenest.
- Változtassuk a csúszkák értékét és figyeljük, hogyan változik a függvény grafikonja (az egyenes meredeksége, illetve az  $y$  tengelyen lévő metszéspontja).

2. Figyeljük meg a *GeoGebra* program segítségével, hogyan változik meg egy  $f$  függvény grafikonja, és hogyan változnak meg a függvénytulajdonságok, ha áttérünk az  $|f|$  vagy a  $-f$  függvényre!

### Segítség

- Hozzunk létre egy-egy csúszkát  $a$ , illetve  $b$  névvel, ezek felhasználásával definiáljuk az  $f(x) = ax + b$  függvényt!
- A parancssorba  $g = \text{abs}(f)$  utasítást írva tudjuk létrehozni az  $|f|$  függvényt. Ugyanitt tudjuk definiálni  $h = -f$  parancssal a  $-f$  függvényt.
- Megtehetjük ezt másfajta, lineáris függvénytől különböző függvények esetén is.

3. Vizsgáljuk a függvény zérushelyét, szélsőértékét (és monotonitását) a *Graph* program segítségével! (Ingyenes matematikai szoftver, letölthető a [www.padowan.dk](http://www.padowan.dk) oldalról.) A program többek között magyar nyelvű menüvel is futtatható, a kívánt nyelvi környezet a *Szerkesztés*  $\rightarrow$  *Beállítások* (angol nyelvű környezetben az *Edit*  $\rightarrow$  *Options*) menüpontban választható ki.

### Segítség

- A programban a *Függvény*  $\rightarrow$  *Függvény beszurása* menüpontban adjuk meg a függvény hozzárendelési szabályát és a függvény értelmezési tartományát, ügyelve a szintaxisra (például tizedes pontot kell használnunk, a négyzetgyökfüggvény neve  $\text{sqrt}()$ , az abszolútérték-függvény neve  $\text{abs}()$ , a hatványkitevőt az AltGr+3 billentyűkombináció lenyomását követően lehet beírni, pl. így:  $x^5$ )! Állítsuk be a grafikon színét, vonalvastagságát!
- Jelöljük meg a vizsgálni kívánt függvényt és indítsuk el a *Számítások* menüpontban a *Számítás*-t. Ekkor megjelenik egy segéd táblázat (jellemzően a képernyő bal alsó részén).
- A segéd táblázatban az *Illesztés* legördülő menüjében kiválaszthatjuk, hogy milyen vizsgálatot szeretnénk. Például a zérushely kereséséhez az „ $x$  tengelyhez” sort kell választani. Ezután a kiválasztott függvény grafikonján egérrel kattintva a zérushely közelében, a program azonnal kiírja a segéd táblázatban a zérushelyet (és a „zérushelyhez” tartozó helyettesítési értéket, továbbá az adott helyen az első és második derivált értékét is, ha ezek léteznek).



#### 4. Egyenlet és egyenlőtlenség (grafikus) megoldására akár a *Graph*, akár a *GeoGebra* program is használható.

##### *Segítség*

Egyismeretlenes egyenlet, egyenlőtlenség megoldása:

- Ábrázoljuk a kiválasztott program segítségével az egyenlet bal, illetve jobb oldalán álló kifejezéssel definiált függvényeket (a megfelelő értelmezési tartományon).
- Ha az egyenlet egyik oldalán a 0 áll, akkor olvassuk le az ábrázolt függvény zérushelyét; ha nem, akkor az ábrázolt két függvény metszéspontjának (metszéspontjainak) első koordinátája adja az egyenlet megoldását.
- Az egyenlet megoldásának ismeretében az egyenlőtlenség megoldása értelemszerűen adódik.

#### 5. Keressük meg a háromszögek nevezetes pontjait, vonalait a *GeoGebra* program segítségével!

##### *Segítség*

- Vegyünk fel a síkon három pontot, *A*-t, *B*-t és *C*-t. A *Sokszög* ikon segítségével megrajzolhatjuk az *ABC* háromszöget, ha sorba kattintunk az *A*, *B*, *C* és végül újra az *A* pontra.
- A pontokat definiáló ikonok alatt találjuk a *Felezőpont* ikont. A nevezetes pontthalmazokat létrehozó ikonok közt találjuk azokat, amelyek segítségével egy adott pontból egy egyenesre *merőlegest* állíthatunk, *szakaszfelező merőlegest* vehetünk fel, *szögfelezőt* rajzolhatunk. Kört rajzolhatunk pl. a középpont és egy kerületi pont megadásával.
- A *Mozgatás* ikonra kattintva tudjuk változtatni az objektumokat. Kattintsunk a *Mozgatás* ikonra, majd az egér gombját lenyomva tartva mozgathatunk a síkon egy pontot, Ekkor a ponttal együtt elmozdul az összes olyan objektum is, amelyet ennek a pontnak a felhasználásával hoztunk létre. A háromszög csúcsainak mozgatásával megfigyelhetjük, hol helyezkednek el különböző háromszögek esetén a megszerkesztett nevezetes pontok, vonalak.

#### 6. A geometriai transzformációk tulajdonságainak vizsgálata történhet *GeoGebra* program segítségével is.

##### *Segítség*

- Adjuk meg a transzformáció jellemző adatát (a tükrözés / forgatás középpontját, vagy a tükrözés tengelyét, vagy az eltolás vektorát) és a transzformálni kívánt pontot (vagy akár egy egész síkidomot, esetleg egy külső forrásból importált képet).
- A menüsor alatt található *ikonok* közül gördítsük le a *transzformációs ikont*, válasszuk ki a kívánt transzformációt, kattintsunk rá. Ekkor az ikon ábrája a kívánt transzformációnak megfelelően megváltozhat (alaphelyzetben a tengelyes tükrözés ikonja látható). A képernyő alján megjelenik, hogy milyen sorrendben kell az objektumokra kattintani a transzformáció végrehajtásához.
- Egérrel jelöljük ki a transzformálni kívánt objektumot, kattintsunk a transzformáció ikonjára, majd a transzformációt definiáló objektumra (pontra, egyenesre vagy vektorra). Ekkor a program a kiválasztott objektumon végrehajtja a kívánt transzformációt. (Forgatásnál előbb még kéri a forgatás irányát és szögét is.)
- Változtassuk folyamatosan a transzformációt definiáló objektumot, és figyeljük meg, hogyan változik meg az eredeti és a transzformált objektum kölcsönös helyzete.
- Maradjon változatlanul a transzformációt definiáló objektum, és változtassuk folyamatosan a transzformálni kívánt objektumot. Figyeljük meg, hogyan változik a képalakzat.

#### 7. Pontdiagram (vonaldiagram) készíthető *Graph* programmal is.

##### *Segítség*

- Válasszuk a *Függvény* → *Pontsor* beszúrása menüpontot.
- A felugró ablak táblázatának „*x*” jelű oszlopába gépeljük be az *x* tengelyen ábrázolni kívánt értékeket, az „*y*” jelű oszlopába pedig a hozzájuk tartozó értékeket.
- Válasszuk ki a vizuális megjelenés paramétereit.
- Ha kívánjuk, akkor vonaldiagramként is megjeleníthetjük a táblázat adatait, ehhez az *Interpoláción* belül válasszuk a *Lineáris* opciót, és adjuk meg a pontokat összekötő vonal stílusát is (folytonos vonal, szaggatott stb.)



# TARTALOM

|                                                                       |    |                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------|----|-----------------------------------------------------------|-----|
| A tankönyv témakörei .....                                            | 3  | 61 Függvények jellemzése .....                            | 96  |
| <b>BEVEZETÉS A GEOMETRIÁBA</b>                                        |    | 62 Szélsőértékek .....                                    | 100 |
| 39 A sík geometriája .....                                            | 4  | 63 Másodfokú függvény és a négyzetgyök-<br>függvény ..... | 104 |
| 40 Általános és szimmetrikus háromszögek .....                        | 8  | 64 Gyakorlati feladatok .....                             | 110 |
| 41 Pitagorasz tétele .....                                            | 12 | 65 Egyenletek grafikus megoldása .....                    | 112 |
| 42 Különleges derékszögű háromszögek .....                            | 16 | 66 Egyenlőtlenségek .....                                 | 114 |
| 43 Távolságok .....                                                   | 20 | R Kisebb, nagyobb, egyenlő .....                          | 118 |
| 44 A kör .....                                                        | 26 | 67 Abszolút értékes egyenletek .....                      | 122 |
| 45 A háromszög nevezetes vonalai és pontjai I. ...                    | 30 | 68 Gyakorlás, tudáspróba .....                            | 126 |
| 46 A háromszög nevezetes vonalai és pontjai II. ...                   | 34 | Témazáró feladatgyűjtemény .....                          | 128 |
| 47 Gyakorlás .....                                                    | 38 |                                                           |     |
| 48 Thalész tétele .....                                               | 40 | <b>EGYBEVÁGÓSÁG, NÉGYSZÖGEK</b>                           |     |
| 49 A Thalész-tétel alkalmazásai .....                                 | 44 | 69 Forgatás és középpontos tükrözés .....                 | 132 |
| 50 Háromszögek kerülete és területe .....                             | 46 | 70 Vektorok és az eltolás .....                           | 136 |
| 51 Gyakorlás, tudáspróba .....                                        | 50 | 71 Tengelyes tükrözés .....                               | 140 |
| Témazáró feladatgyűjtemény .....                                      | 52 | 72 Szerkesztések .....                                    | 144 |
| <b>FÜGGVÉNYEK</b>                                                     |    | R Egybevágósági transzformációk<br>a gyakorlatban .....   | 146 |
| 52 Táblázatok .....                                                   | 56 | 73 Szimmetrikus négyszögek .....                          | 148 |
| 53 Diagramok .....                                                    | 60 | 74 Nevezetes négyszögek területe .....                    | 152 |
| 54 Változások ábrázolása .....                                        | 66 | 75 Gyakorlás .....                                        | 156 |
| R Grafikonok a mindennapokban .....                                   | 70 | R Érdekes feladatok .....                                 | 158 |
| 55 A függvény fogalma .....                                           | 72 | R Lakásfelújítás .....                                    | 160 |
| 56 Készítsünk grafikont! .....                                        | 76 | 76 Gyakorlás, tudáspróba .....                            | 162 |
| 57 Az egyenes arányosság és a fordított arányosság<br>függvénye ..... | 80 | Témazáró feladatgyűjtemény .....                          | 164 |
| 58 Egyenesek meredeksége .....                                        | 84 | R Játékok .....                                           | 166 |
| 59 Lineáris függvények .....                                          | 88 | A feladatok végeredményei .....                           | 168 |
| 60 Abszolútérték-függvény .....                                       | 92 | Számítógépes programok használata .....                   | 172 |



**Képjegyzék:**

Grafika (Létai Márton): 9., 15., 19., 24., 30., 57., 111., 118., 119., 120., 132., 154., 158., 167.

Flickr: 26., 47., 66., 69., 78., 80., 90., 136., 147., 148., 158.

Shutterstock: 5., 14., 21., 26., 39., 104., 112., 118., 155.

Pixabay: 12., 16., 24., 25., 31., 33., 34., 37., 51., 84., 85., 92., 114., 116., 148., 152., 154., 163., 165.

Wikimedia: 43., 66., 76.